

ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ
имени М В Келдыша
Российской академии наук
Московский Государственный Университет
имени М В Ломоносова
Институт Механики

М В.Грошева, Г.Б.Ефимов,
В.А Самсонов

ИСТОРИЯ ИСПОЛЬЗОВАНИЯ
АНАЛИТИЧЕСКИХ ВЫЧИСЛЕНИЙ
В ЗАДАЧАХ МЕХАНИКИ

Москва - 2005

Аннотация

М В Грошева, Г Б Ефимов В А Самсонов История использования аналитических вычислений в задачах механики ИПМ им М В Келдыша РАН 2005 87 стр Библиография более 500 названий

Работа посвящена истории развития Символьных Аналитических преобразований или Вычислений на ЭВМ и Систем для Аналитических Вычислений (САВ) в нашей стране (другой термин - Компьютерная Алгебра). Рассматриваются основные этапы создания и использования отечественных САВ смена ведущих коллективов и САВ, важнейшие конференции и семинары. Обращается внимание на опыт использования САВ в обучении и образовании. Предлагается классификация типов САВ и классов решаемых с их помощью задач, объясняющая многообразие отечественных САВ.дается способ комплексного описания их возможностей и свойств. Разнообразие применений САВ особенно в задачах механики, показывается на базе цикла вычислительного эксперимента. Дано описание большого числа работ по использованию САВ в разнообразных задачах механики. Пути развития символьных вычислений в нашей стране демонстрируются на примере старейшего вычислительного центра – ИПМ им М В Келдыша. Работы последних лет отражены лишь в виде отдельных примеров, основное внимание уделяется истории применения САВ, тем более, что сейчас об их использовании часто и не упоминают – как об известном и всем доступном средстве.

Работа продолжает обзор по САВ и применению их в механике, который был выполнен по заказу ВИНИТИ в 1992 году (серия "Итоги науки и техники", "Общая механика", том 8) но не вышел в свет. В настоящей работе он дополнен новыми сведениями, в том числе двумя статьями. Обзор базируется на материалах по приложениям САВ, собирающихся в Информационном банке данных «Символьные преобразования на ЭВМ в задачах механики» М В Грошевой (Институт механики МГУ, тел 9395478, e-mail - grosheva@lpmech.msu.su)

Библиография содержит более 500 публикаций.

Работа поддержана РФФИ, гранты N 04-01-00346 и НШ 2003.2003.1

Ключевые слова аналитические вычисления, компьютерная алгебра, механика, динамика системы тел, теория управления, история

REZUME

M V Grosheva, G.B Efimov, V A Samsonov The History of Symbolic Manipulation and it's Applications in Mechanics Keldysh Institute of Applied Mathematic of Russian Academie of Science Moscow, 2005 The bibliography includes more than 500 units

The paper is devoted to the history of development of computer symbolic algebraic manipulations (SAM) and analytical computational systems (computer algebra) in Russia. The main stages of elaboration and applications of soviet SAM are considered, the leaders of each stage are mentioned. The main conferences and seminars are listed. The attention is paid to the experience of SAM usage in the areas of learning and education. The classification of problems to be solved and systems for their solution is done. This classification explains the variety of Russian SAM and gives the way to describe and compare

their features and possibilities. To demonstrate the variety of SAM applications, especially in mechanics, a cycle of computational experiment is presented. Numerous investigations on SAM usage in mechanics are considered. The oldest computational center, KIAM, was used as an example to demonstrate the way of SAM development in Soviet Union. The attention is paid, to the most part, to the early history, the last works are presented as some examples.

Key word. symbolical algebraic manipulations computer algebra, mechanics, multies-bodies dynamics, programming, control theory, history

СОДЕРЖАНИЕ

Аннотация	
Содержание	3
Введение	4
Глава 1 История использования систем для аналитических вычислений и САВ в задачах механики	6
1.1 Работы периода 60-70-х годов	6
1.2 Начало массового использования САВ	9
1.3 Некоторые тенденции конца 1980 - начала 1990 годов	14
1.4 Использование САВ в обучении и образовании	16
Глава 2 Системы аналитических вычислений и их свойства	20
2.1 Использование САВ в цикле исследования	20
2.2 Классы задач, использующих символьные преобразования и типы САВ	25
2.3 Описание САВ и их свойств	29
2.4 Описание проблемно специализированных САВ	32
2.5 Краткие сведения о некоторых отечественных САВ	35
Глава 3 САВ и общая механика	36
3.1 Алгоритмы теоретической механики	38
3.2 Исследование линеаризированных уравнений	40
3.3 Нелинейные системы	42
3.4 Задачи теории оптимального управления	44
3.5 Управление роботами и другими техническими объектами	46
3.6 Задачи управляемости, искусственного интеллекта	49
3.7 Небесная механика	50
3.8 Моделирование, проектирование, планирование эксперимента	52
3.9 САВ и задачи механики сплошных сред	54
Глава 4 Символьные вычисления в Институте прикладной математики имени М В Келдыша	57
Литература	63

Рецензент доктор физ.-мат наук В Д Иртегов (Иркутский ВЦ СО РАН)
Редактор кандидат физ.-мат наук Е Ю Зуева

В В Е Д Е Н И Е

Двадцать лет назад состоялась Всесоюзная конференция по САВ в Горьком, которая подвела итоги достижениям символьных преобразований в нашей стране и оформила это научное направление. Готовя нашу работу в 1992 году, мы снова ощутили импульс от этого яркого события. Еще десять лет спустя, в сильно изменившемся мире, мы вновь обращаемся к истории, чтобы сохранить память о трудах энтузиастов символьных преобразований.

Механика с самого начала находилась среди лидеров в применении систем аналитических вычислений (САВ) – по громоздкости задач первостепенной важности (например, динамики спутников в 60-е годы), по готовности математических методов, по специалистам, способным создавать, развивать и использовать САВ. Обзору этапов развития и использования САВ при решении задач механики посвящена настоящая работа (см. также обзоры В А Брумберг [1974], В П Гердт, О В Тарасов, Д В Ширков [1980]. Информатор-83, Я А Ван Хульзен, Ж Кальме [1986], М В Грошева, Г Б Ефимов [1988, 1998], Н Н Васильев, В Ф Единерал [1994]).

Применение аналитических выкладок в механике сталкивалось с большим разнообразием задач, используемых выражений и методов. Требования САВ к машинным ресурсам очень велики и долго, особенно в отечественной практике, были на пределе возможностей. Приходилось постоянно искать компромисс между общностью символьных выражений и преобразований и эффективностью САВ. Это привело к возникновению многочисленных САВ различного назначения, универсальных и специализированных, большая часть которых была разработана пользователями-прикладниками.

Развитие аналитических вычислений за рубежом в меньшей мере было подвержено указанным трудностям – благодаря быстрому росту возможностей компьютеров и более целенаправленному развитию символьных вычислений. Этапы этого пути неплохо отражены в литературе. Отечественные разработки опубликованы весьма неравномерно, многие из них труднодоступны и нередко отражены лишь в материалах конференций, семинаров и совещаний. Наше внимание было обращено, в первую очередь, на отечественные работы. История их развития и использования освещается в нашей работе.

Использование современных универсальных САВ сейчас общеприято, однако остается область применения для специализированных систем в таких областях, как небесная механика или динамика систем многих связанных тел. Поэтому ряд отечественных САВ, превратившихся, как правило, в пакеты в рамках известных САВ, продолжают свое существование.

Опыт применения САВ в механических задачах и арсенал реализованных методов также важны, и заслуживают упоминания работы не только рекордные. Важная роль конференций и семинаров вынуждает к их частому упоминанию и ссылкам на сборники трудов или тезисов. Для информации об этих научных мероприятиях и простоты ссылок вводим обозначения наиболее часто цитируемых конференций и сборников материалов.

Харьков-72 – Вычислительная математика и вычислительная техника. Всесеминар Харьков, 1979 - Харьков ФТИНТ АН УССР, 1972, N 3, 152 с.
Дубна-80, Дубна-83, Дубна-85 – Аналитические вычисления на ЭВМ и их применение в теоретической физике. Материалы междунар совещ Дубна, 1979, 1983, 1985 - Дубна ОИЯИ, 1980, 187 с., 1983, 260 с., 1985, 420 с.
Информатор-83 – Системы аналитических вычислений на ЭВМ (Аналитические пакеты прикладных программ) М В Грошева, Г Б Ефимов, В А Брумберг,

И О Бабаев, Н Н Васильев, Т В Иванова, В И Скрипниченко, С.В Тарасевич, И Р Аксельрод, Л Ф Белоус, Г А Долгов, А В Кузьмин, Р В Кульветене, Г П Кульветис, М.В.Почтаренко, М А Чубаров Материалы семинара ИМеханики МГУ, 1981 - Информатор ИПМ АН СССР, 1983, N 1, 65 с

Вильнюс-84 – Теория и практика автоматизированных систем аналитических преобразований Тез респ совещ Вильнюс, 1984 - Вильнюс ИПК СНХ Лит ССР, 1984, 93 с

Горький-84 – Системы для аналитических преобразований в механике Тез докл Всес конф Горький, 1984 - Горький ГГУ, 1984, 147 с

Аналитические ППП-88 – Пакеты прикладных программ Аналитические преобразования -М., Наука, 1988, 156 с

Ленинград-88 – Методы компьютерного конструирования моделей механики систем твердых тел Материалы Всес рабочего совещ Л , 1988 - Препр Ленингр фил Ин-та машиновед АН СССР, 1989, N 16, 32 с

Киев-88 – Системы аналитических вычислений (методы компьютерной алгебры) в механике деформируемого твердого тела Докл Всес совещ Киев, 1988 - КГУ Киев, 1990, (168с) Деп УкрНИИНТИ 17 04 90, №732, - Ук90

Ленинград-89 I,II – Методы компьютерного конструирования моделей классической и небесной механики-89 Секция I Небесная механика Тез докл Всес совещ Л , 1989 - Ин-т теор астрон АН СССР, 1989, 67 с Секция II Теория и практика компьютерного конструирования моделей механики многочленных технических систем Материалы Всес совещ Л , 1989 - Препр Ленингр фил Ин-та машиновед АН СССР, 1989, N 32, 83 с

Вильнюс-90 – Аналитические преобразования на ЭВМ в автоматизации научно-исследовательских работ Всес конф Вильнюс, 1990 - Вильнюс ИПК СНХ Лит ССР, 1990, 94 с

Ленинград-90 – Алгоритмы и программы небесной механики Всес совещ Л 1990 - Л , Ин-т теор астрон АН СССР, 1990, 80 с

Дубна-90 – Computer Algebra in Physical Research Int Conf Computer Algebra Phys. Res . Dubna, USSR, 1990 Memorial Volume for N N Govorun - Singapore, New Jersey, London, Hong Kong - World Scientific, 1991, 453 р Сб аннот . Дубна, ОИЯИ, 1990, 96 с

Севастополь-91 – Применение ЭВМ для решения задач механики Тез научно техн конф Севастополь, 1991 - Киев общ "Знание" Украины, 1991, 55 с

С -Петербург-91,-92,-95 – Компьютерные методы небесной механики Тез докл Всес совещ с международным участием С -Пб ,1991 - Инст теор астрон АН СССР, 1991, 101 с , - ИТА РАН, 1992, 95 с , 1995, 208 с

Киев-93 – International Symposium on Symbolic and Algebraic Computation (IS-SAC'93) July 6-8, 1993, Kiev, Ukraine Abstracts, 1993, 321 р + International Workshop "Computer Algebra Application" July 9, 1993, Kiev, Ukraine Extended Abstracts, S-Petersburg, 1993, 55 р

S -Petersburg-93, -94 – International Congress on Computer Systems and Applied Mathematics (CSAM'93) 19-23July, 1993 Abstr., 1993, 278 р Section: "Computer Algebra Applications" International Conference on Interval and Computer-Algebraic Methods in Science and Engineering (INTERVAL'94) 7-10 March, 1994. Abstracts, 1994, 266 р

Переславль Залесский -94, -95 – International Workshop "New Computer Technologies in Control Systems", Pereslavl-Zalesky 11-15 July, 1994, Abstracts, 1994, 99 р 13-19 August, 1995, Abstracts, 81 р

Bucharest-95 – International Conference "Symbolic Calculations and Their Application in Fundamental Researches", Bucharest, 5-11 September, 1995. Abstracts, ITA RAS, St Petersburg, 1995, 48 p

Инфосфера-95 - Международная конференция "Эволюция инфосферы" ("Информатика-95"), Москва, 21-23 ноября 1995

Москва, Институт механики МГУ - 1978, 1981, 1986-1990 гг ~ Всесоюзные съезды по использованию САВ в задачах механики

Минск-97 ~ Компьютерная алгебра в фундаментальных и прикладных исследованиях Междунар конфер 1997 – Тезисы Белорусск ГУ Минск 1997

Pragua-98 – 4-th Intern IMACS conference on Applications of Computer Algebra - IMACS ACA'98, Prague, Aug 9-11, 1998 – The History of Computer Algebra Applications Session Theses of Report - Moscow, 1998 36 p

Минск-99 – Компьютерная алгебра в фундаментальных и прикладных исследованиях и образовании 2 Междунар конф сент 1999. Тез Минск 1999. 108 с

St-Petersburg-2000 – 6 Intern IMACS confer on Applications of Computer Algebra - IMACS ACA' 2000, St-Petersburg, July-2000 – Theses St-Petersburg.2000.

Dubna-2001 – Computer Algebra and it's Application to Physics - CAAP-2001 Dubna, JINR 2001

Тула-2005 – Современные технологии в преподавании курса теоретической механики Сб труд междунар научно-методич конфер Тула ТГУ,2005.158 с

Приводимая библиография не является исчерпывающей Ссылки приводятся по фамилиям и году публикаций, иногда лишь по фамилии, имея в виду работы его и соавторов (и группируя их) Авторы благодарны В С Штаркману, Ю С Фишману, Андр В Климову, З Ф Бочковой, С В Бирюкову за обсуждение и советы

Глава 1 История развития и использования символьных преобразований и САВ в задачах механики

История развития САВ, их применения в задачах механики содержит немало поучительного На разных этапах ведущими оказывались те или иные тенденции, сменился состав лидирующих САВ, центры их развития, группы исследователей, тематика задач Поэтому представляет интерес осветить историю развития аналитических вычислений, прежде всего отечественную

Развитие и применение символьных или аналитических преобразований (вычислений, выкладок) на ЭВМ в нашей стране прошло через несколько этапов. Энтузиазм первых попыток и достижений в 1960-е годы сменился долгим периодом незаметной работы немногочисленных групп Новый интерес к символьным аналитическим вычислениям в конце 1970-х - начале 1980-х годов сильно расширил число пользователей САВ, сделал этот вид "математического", программного обеспечения массовым среди исследователей-механиков

Современный этап функционирования САВ определяется появлением персональных компьютеров (ПК), быстрым ростом их возможностей Использование имеющихся на них современных САВ стало распространенным, рядовым явлением Наша задача – вспомнить этапы развития отечественных работ по символьным преобразованиям, трудности и достижения их вот уже более чем сорока летней истории

1.1 Работы периода 1960-70-х годов

Идеи и первые попытки выполнения символьных или аналитических выкладок на ЭВМ относятся к далеким уже временам Они исходили из общих идей кибернетики – воспроизведения способностей и действий человека Опирались эти

первые попытки на достигнутую в "ручных" методах алгоритмизацию громоздких преобразований формул в задачах физики, механики, алгебры, анализа. Автоматизация преобразований формул в некоторых из этих задач уже тогда была актуальной, ибо возможность дальнейшего продвижения упиралась в громоздкость преобразований, превосходящую возможности рядового исследователя. С тех пор САВ и аналитические преобразования прошли немалый путь. Развитие их шло через преодоление внутренних противоречий и трудностей – приходилось находить равновесие между эффективностью и общностью, поскольку машинные ресурсы были недостаточны. А так как символьные преобразования не попадали в главное русло информатики, выявление и преодоление этих трудностей было замедленно.

К первым шагам символьных преобразований (см. также гл.4) относятся работы Л В Канторовича [1957] об описании символьных выражений в машине и действиях с ними, работы его учеников Е Т Петровой и Т Н Смирновой ([1962], полиномиальная САВ для задач теории упругости). Ранние работы по САВ в Сибири см М М Бежанова, В Л Катков, И В Потосин [1972], A Miola, I Pottosin [1981]. В А Шурыгин и Н Н Яненко [1961] использовали САВ в механике сплошных сред. Д Е Охоцимский [1964], В А Брумберг [1963], Н Г Полозова и В А Шор [1963] решали задачи небесной механики. Задачам теории упругости были посвящены работы В А Кабулова [1963] и В А Толока [1964] в Ташкенте. Степенные полиномы применялись Д Е Охоцимским при построении асимптотических разложений для полета космического аппарата. Для разложения решения в ряды Пуассона (кратные ряды Фурье с коэффициентами – степенными полиномами) В А Брумбергом использовались численно-символьные вычисления. Тригонометрические полиномы представлялись символично, а их коэффициенты вычислялись при заданных значениях параметров – "сворачивались" в число. Такое ограничение символьных преобразований диктовалось громоздкостью рядов Пуассона и ограниченностью машинных ресурсов. Зато облегчалась вариация разложений коэффициентов рядов Фурье, не ограничиваясь лишь степенными полиномами, реализуя различные представления классической небесной механики.

На основе первых успехов и внимания к области искусственного интеллекта, САВ получили новый импульс. К концу 60-х - 70-м годам относится начало работы нескольких активных групп исследователей, был создан ряд САВ, универсальных и полиномиальных (которые в тот период можно было считать универсальными). Трудности сочетания общности и эффективности, недостаточность машинных ресурсов (М-20, БЭСМ-4, БЭСМ-6) затянули завершение некоторых из них. Одни из этих проектов сосредотачивались на символьных вычислениях и алгоритмах, в других стремились сочетать численные и символьные методы. В Новосибирске и Томске, Харькове и Горьком, Москве и Ленинграде разрабатывались системы для действий со степенными и тригонометрическими полиномами или более общими выражениями (см. Харьков-72). В школе С С Лаврова был создан транслятор с языка Лисп и САВ на нем (С А Абрамов [1973], В В Тумасонис [1971]). В Ф Турчиным [1968] создан язык Рефал, в том числе для символьных преобразований (см. Харьков-72, также в главе 4).

Одним из путей разрешения противоречия общности и эффективности была аппаратная реализация САВ – языка и системы АНАЛИТИК, созданной большим коллективом под руководством В М Глушкова [1971] на малой машине МИР-2 (см. также Ю С Фишман [1974]). Это была первая в мире ЭВМ для аналитических вычислений, совместно с численными. В классе малых машин находились и ее преемники, на которых продолжался АНАЛИТИК (МИР-3, СМ-1410, ЕС-2680). МИР-2 доказал успешность такого подхода. Были выпущены многие десятки ма-

шин с возможностью работы в численном режиме и с символьными выражениями общего вида АНАЛИТИК обладал большим интеллектом, выполнял весьма общие преобразования – предвосхищая для САВ некоторые веяния гораздо более поздних времен. Распространенность АНАЛИТИКА и его возможности поставили его лидером среди САВ на большой период времени. Возникли активные пользователи, в том числе механики, объединенные в ассоциацию пользователей МИРа. Научный обмен по символьным вычислениям происходил на школах и семинарах Института кибернетики АН УССР, позже также на научных конференциях НИВЦ АН в Пущино. Однако аппаратная реализация оказалась своеобразной "ловушкой" для АНАЛИТИКА: малые ресурсы МИРа, сложность модификаций и исправления ошибок, трудности с выпуском следующих машин, ничтожность их серий – все это привело АНАЛИТИК к уменьшению популярности и распространения. Позже была создана программная реализация АНАЛИТИК (версии –89, -91 и –93, -2000), он продолжает развиваться и использоваться (Б А Бублик, В П Клименко, Ю С Фишман [1987], В П Клименко, С Б Погребынский и др [1989], С.-Петербург -91 и др, В П Клименко, А А Морозов, Ю С Фишман и др [1995]).

Многие из первых САВ создавались для решения механических задач или использовались при их решении. Так, Дифференциальный Процессор, система КИНО (для исследования групповых свойств систем дифференциальных уравнений, М М Бежанова, В Л Катков, И В Поттосин [1972] и В Л Катков, Н И Костюкова [1969]), система АВТО-АНАЛИТИК (Е А Арайс и др [1973]) использовались в задачах механики сплошных сред. Системы ИТА АН СССР (под руководством В А Брумберга, см [1974] и др) – для решения в рядах задач небесной механики, АЛГЕБРА-0 М А Чубарова (см также А С Алексеев, Г А Долгов и др) для автоматизации вывода уравнений движения сложных систем механики и исследования их устойчивости. Система АНАЛИТИК применялась киевскими механиками и физиками в задачах с малым параметром, при исследовании нелинейных колебаний методом осреднения (Ю А Митропольский, А А Молчанов [1981]). В Институте прикладной математики АН СССР проводилось построение решений в виде рядов (степенных и тригонометрических) в задачах космодинамики (Г Б Ефимов [1970]), нормализация систем дифференциальных уравнений (А П Маркеевым [1970] и А.Г Сокольским - А П Маркеев, А Г Сокольский [1975]).

Подведением определенных итогов в разработке САВ была конференция в Харькове в 1972 г., в Институте физики низких температур АН УССР (Харьков-72) (см Е А Арайс, И Р Аксельрод, М М Бежанова, И В Поттосин, Н А Калинина, В Ф Турчин, И Б Щенков, М А Чубаров и др). На ней были представлены многие САВ (в основном универсального типа) из Киева, Харькова, Томска, Новосибирска, Горького, Ленинграда, Москвы. Круг обсуждения в основном касался системных и общих вопросов разработки САВ, прикладные САВ представлены были слабо.

Достижения прикладных исследований по САВ попадали сперва на соответствующие конференции работы астрономов из ИТА и Парижского Бюро долгот (В А Брумберг, J Kovalevsky) были представлены на Конференции по небесной механике (Москва, Гос астрономический институт им Штернберга МГУ, 1967). Результатом лекций на школе-семинаре в Томском университете стала книга В А Брумберга [1974]. Автоматический вывод уравнений движения для систем многих связанных тел был представлен на 3-й Четаевской конференции по устойчивости движения и механике (Иркутск, 1972), Всесоюзном совещании по робототехнике (Владимир, 1978), 2-й Всесоюзной конференции по оптимальному управлению в механике (Казань, 1978) и других.

История и достижения аналитических вычислений за рубежом неплохо освещены в доступных обзорах. Назовем, например, обзоры и книги В П Гердт, О В

Тарасов, Д В Ширков [1980], Н Н Васильев, В Ф Еднерал [1994], В.А Брумберг [1974,1990], M S Davis [1968], J A.van Hulzen, J Calmet [1983], B F Caviness [1986], A G Akritas [1989] К 1966 г относятся первые конференции по символьным преобразованиям. симпозиум ACM в Вашингтоне и рабочая конференция IFIP в Пизе (см B F.Caviness [1986]) В этот период началось оформление аналитических вычислений в самостоятельное научное направление

Специальный коллоквиум по САВ в небесной механике в рамках Конгресса Астрономического союза в Праге (IAU,1967), был определенным признанием достижений в этой области В обзорном докладе M S Davis'a [1968] упоминалось 40 систем для нечисленных вычислений – от языков (включая лисп) до САВ Сравнивались различные САВ, – например, по виду печати результатов Упоминаются замечательные результаты САВ повторение на компьютере классической теории движения Луны Ch Delaunay (D Barton [1966]), причем была обнаружена ошибка Отмечена первая известная автору попытка символьного дифференцирования для вывода уравнений движения спутника (1954 г) M S Davis и J Kovalevsky [1968] давали обзоры работ по построению механических и небесно-механических решений в рядах, сравнивали программы для рядов Пуассона Этим же задачам были посвящены и другие доклады коллоквиума Признанием роли небесной механики в развитии САВ можно считать использование в известных обзорах (например, D Barton и J P Fitch [1972]) задачи-теста из небесной механики построение эллиптического кеплеровского движения двух тел в виде разложения по степеням эксцентриситета и некоторого параметра

В 1971 г в Американской ассоциации программистов ACM создается группа по символьным преобразованиям – SIGSAM (Special Interesting Groupe for Symbolic and Algebraic Manipulations) В 1968 г на базе прежних разработок формируется большой проект САВ MACSYMA (в Массачусетском Технологическом институте в рамках НИР "Человек и Машина" – см , например, R Pavelle [1986], J Moses [1974]) MACSYMA и конференции ее пользователей служили собирателем и катализатором работ по машинной аналитике – теоретических, прикладных и алгоритмических Проводятся специальные конференции SIGSAM, издается SIGSAM Bulletin ACM, вопросам символьных преобразований отводится место на программистских и прикладных конференциях и в журналах

Одной из ключевых проблем развития САВ, которую приходилось решать в начальный период – конфликт между общностью и эффективностью Специфика САВ такова, что "критическая масса", при достижении которой их развитие и использование идет активно, – велика по сравнению с другими областями (численными методами, даже трансляторами) Кроме ядра, языка аналитических преобразований, нужно реализовать общематематические и проблемные алгоритмы, многие из которых очень специфичны (см гл 2) Велики требования и по объему машинных ресурсов и по количеству вложенного труда и интеллекта При недостаточности предоставляемых ресурсов или "трудо-" и "умо-" затратах ниже критической массы – САВ развивались замедленно, причем в отечественных исследованиях это особенно сказывалось из-за медленного роста машинных ресурсов и разобщенности небольших групп разработчиков Трудности эти объясняют феномен одновременного создания и существования большого числа отечественных САВ, каждая из которых по-своему сочетала противоречивые требования, с учетом особенностей ситуации и сферы приложения

1.2. Начало массового использования САВ.

В конце 1970-х годов наступило время широкого использования САВ, их признания как научного направления Аналитические вычисления регулярно обсуж-

даются на конференциях. Важным событием стало первое Совещание по Аналитическим вычислениям на ЭВМ в Дубне, в ОИЯИ в 1979 году (*Дубна-80*), где собрались разработчики и пользователи многих САВ. Происходило широкое обсуждение, причем на фоне развития САВ в мире. Так, на ней Э.Д.Крупников организовал выставку оттисков зарубежных работ по САВ. Благодаря содействию А П Ершова и С С Лаврова небольшие секции по САВ были созданы на программистских конференциях *Методы трансляции* (Новосибирск, 1981) и *Диалог Человек-ЭВМ* (Протвино, 1983). Они позволили увидеть состояние и задачи САВ на общем фоне современных проблем программирования и разработки матобеспечения. Тематика САВ (общего, механического и небесно-механического профиля) постоянно присутствовала на ежегодных школах по пакетам прикладных программ (ППП) Иркутского ВЦ СО АН СССР в конце 1970-х и 80-е гг., материалы по САВ публиковались в трудах этих школ (серия "Пакеты прикладных программ", Новосибирск, например, М В Почтаренко [1978, 1985], М А Новиков [1984] и др.).

Большим общесоюзным форумом по новому научному направлению явилась Всесоюзная конференция *Системы для аналитических преобразований в механике* (*Горький, 1984*). На ней подводились итоги двадцатилетнего пути и определялись направления дальнейшего движения. Название конференции отражало ту роль, которую играли механические приложения и САВ механического профиля в развитии аналитических преобразований на ЭВМ в нашей стране. Доклады были распределены по трем секциям системы, приложения и алгоритмы (по 27, 64 и 17 докладов). Для большей информативности тезисов и докладов (учитывая новизну тематики и многообразие вопросов – от постановки задачи до эффективности счета) предлагалось их строить по определенной анкете. Это облегчило оценку и сравнение достоинств САВ и полученных результатов, возможность их использования в других системах. Конференция *Горький-84* дала достаточно полное представление об имевшихся на тот момент САВ, их состоянию и о разнообразии приложений, составу групп разработчиков систем и прикладников. Материалы конференции характеризуют развитие САВ за целый период их существования, служат своеобразным справочником отечественных работ и результатов по САВ и их применению.

В конференции приняли участие многие известные ученые – механики, физики и программисты. Назовем некоторые из пленарных докладов – А А Самарский и М Ю Шашков [1984], Н Н Яненко с учениками [1985] (посвященные вычислительным методам механики сплошных сред), В М Матросов, С Н Васильев и др [1984] о выводе теорем в методе векторных функций Ляпунова, Н Н. Говорун с сотрудниками [1984] об отечественных и, главным образом, зарубежных САВ, используемых в Дубне, в ОИЯИ. В докладе В П Гердта, О В Тарасова, Д В Ширкова [1980] рассказывалось о достижениях в физике, Д М Климова и др. [1985] – о задачах теоретической механики, А В Сергиевского и М А Чубарова [1984] – об особенностях применения САВ в проектировании.

На секции, посвященной системам, были представлены основные отечественные САВ, ведущие и достаточно развитые вместе с небольшими разработками вспомогательного характера. Универсальные САВ АНАЛИТИК (Киев), АВТО-АНАЛИТИК (Томск), АУМ (Новосибирск), АЛЬКОР (Москва), СИРИУС (Харьков), САВАГ (Ленинград), SANTRA (Москва) и другие. Из проблемно специализированных САВ назовем небесно-механические САВ ИТА АН СССР (УПП, GRATOS, SASM, СПРИНТ и другие), большое число САВ для вывода уравнений движения в задачах механики, отдельные САВ и специальные пакеты в развитых системах. Представлены были работы по адаптации и развитию в наших условиях зарубежных САВ, прежде всего Reduce (в Дубне – В П Гердт, В А Ростовцев, Р Н Фе-

дорова и др., в МГУ – А П Крюков, В Я Родионов, в Перми – М Ю Дроздов, В И Лумпов, и в других центрах – см. Дубна-83, -85). Обсуждались методические вопросы – использование САВ инженерами (А.С Гульбинас [1984]) или психологический анализ диалога с САВ. Вопросы повышения эффективности работы САВ затрагивались в докладах алгоритмической секции.

Широко были представлены приложения, среди которых механические доминировали 45%, из них 29% по общей механике. Картина распределения докладов по научным специальностям, см. табл 1, дает представление о приложениях в механике. Внимание к конференции видно по реферируемому в РЖ Математика и Механика (например, всех 12 докладов по теории упругости – РЖ Мех 1985.186, 162, 249-251 и др.) Применения САВ в физике и математике полнее можно представить по материалам конференций в Дубне (Дубна-80,-83, -85, -90).

Секция алгоритмов впервые оформилась в Горьком. Популярность этого важного направления в аналитических вычислениях указывает на определенную стадию в развитии САВ. На ранней стадии внимание привлекают работы по созданию систем и их приложениям. Затем интерес к системам и традиционным приложениям ослабевает, а вопросы специфических символьных алгоритмов приобретают все большую популярность. Динамика соотношения числа докладов (системы, приложения и алгоритмы) показана Н А Калининой и А Л Семеновым [1984] для четырех отечественных и четырех зарубежных конференций 1979-1983 гг для первых – 50, 30 и 20 %, для вторых – 20, 15 и 65%. Наши подсчеты (М В Грошева, Г Б Ефимов [1988]) дают: Дубна-85 – 36, 36 и 28%, отечественные конференции 1984-1985 г. – 30, 50 и 20%, Европейская конференция EVROCAL-85 – 27, 28, 45%, (Горький-84 см выше). Подсчеты показывают запаздывание отечественных исследований по символьным алгоритмам и САВ.

Таблица 1

Распределение докладов в "Горьком-84" по САВ, темам (и языкам)

САВ тип название обл примен	Универсальные				Специализированые менее развитые		Всего
	Аналитик Reduce	Алгебра-0 и Сириус	др				
физика	3	1	-	4	2	2	12
математика	-	-	-	1	1	2	4
механика							
м спл сред	2	5	-	3	4	7	21
общая мех	8	4	6	3	10	8	39
"-выв ур др	-	-	-	-	2	2	4
колебания	2	2	1	1	-	2	8
устойчив	-	-	4	-	2	-	6
неб механ	-	-	-	1	4	-	5
всего	13	10	6	11	17	19	76
языки создания САВ							
фортран	-	-	5	-	3	10	18
алгол, PL1	-	-	-	5	3	4	12
рефал, лисп	13	-	-	3	4	1	21
другие	-	10	1	3	7	4	25

В таблице 1 приводятся также данные использования САВ универсальных и специализированных, написанных на языках разного уровня – по данным Горький-84. Как правило, универсальные САВ писались на языках высокого уровня (лисп, Рефал, АНАЛИТИК), а специализированные – на языках низкого уровня.

(фортран, алгол, PL/1), казалось бы не приспособленных для разработки САВ и среди зарубежных САВ имело место подобное разделение при том, что многие ведущие универсальные системы использовали лисп, специализированные системы использовали фортран (в более позднее время – паскаль). Так, САВ для небесной механики, для работы с рядами Гуассона используют фортран, в том числе системы A.Rom [1970] или R A Броуске [1980] в Техасе, одном из центров развития САВ Reduce. Среди САВ для моделирования в механике многих связанных тел также большинство использует фортран (W Schiehlen [1990]). Дело в том, что для универсальных САВ важна общность символьных выражений и их преобразований, для чего удобнее языки высокого уровня. Для специализированных САВ важнее эффективность, а типы выражений и их преобразований достаточно узкие, четко определенные. Это позволяет пользоваться языками, привычными для прикладников, которые и создавали специализированные САВ.

Своевобразным дополнением к конференции Горький-84 была республиканская конференция Вильнюс-84. Она хронологически предшествовала горьковской и в большей степени была сосредоточена на задачах механики и САВ для них. Среди механических приложений – символьный расчет различных матриц жесткости для метода конечных элементов, дополняющий численные пакеты по этому методу (А С Гульбинас, Г П Кульветис, Р В Белявичус, Р А Бараускас – все [1984]). Много докладов было по теоретической механике. Усилиями А С Гульбинаса впервые была организована демонстрация работы САВ на БЭСМ-6 и ЕС.

В 1979 г было положено начало семинарам по механическим приложениям САВ в Институте механики МГУ. Семинар 1980 г собрал уже многих прикладников – разработчиков САВ и их пользователей. Для большей информативности докладов была разработана схема описания САВ (город, авторы, характеристики САВ, приложения). Часть САВ докладывались по литературным данным. Материалы семинара были изданы в виде препринта ИПМ им. М В Келдыша (*Информатор-83*), схема описания развилась в способ комплексного описания САВ (см ниже, гл 2 и М В Грошева [1985, 1988]). После конференций в Горьком, Вильнюсе и Всесоюзной школы Клязьма-87 семинары в Институте механики МГУ продолжались регулярно, объединяясь в первые годы с семинаром по компьютерной алгебре на механико-математическом факультете МГУ. Темой 1986 г были алгебраические методы и САВ в механике, в 1987 г – методы теории групп, в следующие годы – теория управлений, экспертные системы, САВ в образовании.

Всесоюзная школа "Системы аналитических вычислений в механике" Клязьма-87 под Москвой собрала очень полно специалистов по системам, алгоритмам и приложениям. Тезисы конференции, к сожалению, не были изданы, даже в виде депонированного издания. На лекциях широко было проведено ознакомление с ведущими САВ, отечественными и зарубежными, с методами механики и алгоритмами, реализованными на САВ. Ряд этих материалов были изданы (В С Берман, Д М Клинов, О М Городецкий и др – все [1987]).

Важную научную и организующую роль играли конференции (Совещания) по аналитическим вычислениям в Дубне, в ОИЯИ, под руководством Н Н. Говоруна. Дубна-80 была первой большой конференцией после Харькова-72 и снова собрала вместе специалистов по САВ. Правильная периодичность этих конференций, высокий уровень, публикация трудов, участие зарубежных ученых – все это придавало конференциям в Дубне статус ведущих среди многих научных мероприятий. Правда, число участников обычно бывало ограниченным, а механика не была среди центральных тем. Конференции эти отличались постановкой актуальных вопросов (с помощью заказных докладов), знакомили с передовой зарубежной техникой и САВ, которые в значительной степени поступали к нам через

ОИЯИ Так, на Дубне-83 появилась система Reduce, в Дубне началось ее освоение. В ОИЯИ проводилась адаптация Reduce на отечественные машины. Многие механики осваивали эту систему как практиканты в ОИЯИ и получали ее там.

Оперативным центром координации разработок по САВ, знакомства с отечественными и мировыми достижениями в течение десятилетия был Всесоюзный семинар под руководством Д В Ширкова на физическом факультете МГУ (секретари – В Я.Родионов и А П Крюков). В последнее десятилетие этот семинар продолжает свою работу на ВМК МГУ под руководством С А Абрамова.

В Дубне на конференциях стараниями ученых из ОИЯИ, благодаря международному статусу Института и большим международным контактам, проводилось включение отечественных исследований по САВ в международную научную жизнь. Иностранные ученые приглашались на конференции в Дубну, сотрудники ОИЯИ активно проникали на заграничные и прокладывали дорогу другим Конференциям Дубна-85 уже имела вполне международный характер благодаря присутствию многих зарубежных ученых, включая широко известных (В F Caupless, W.Lassner, В Buchberger и другие). Конференция Дубна-90 (памяти Н Говоруна) была в полном смысле международной и по составу участников (более 50 зарубежных участников, сделавших треть докладов), и по участию известных ученых. Прикладные работы, в том числе и по механике были представлены достаточно широко. В то же время, советские исследователи и доклады все чаще попадали на международные конференции (включая конгрессы EVROCAL'85 в Линце в 1985 г., ISSAC в Лейпциге в 1989 г. и в Бонне в 1991 г.). Международный семинар (Новосибирск-Иркутск, 1990) кроме систем и алгоритмов был посвящен применением САВ в матфизике и вычислительных методах механики сплошной среды.

В 1993 году Конгресс ISSAC'93 впервые прошел в нашей стране – в Киеве, Киев-93 (к сожалению, число участников было меньше обычного из-за трудностей наступившего времени). Усилиями А А Летичевского и А Г Сокольского было организовано рабочее заседание по отечественным САВ и прикладным разработкам, собравшее половину от общего числа докладов на симпозиуме ISSAC'93.

Символьные вычисления были представлены на конференциях ИТА (С-Петербург-91, -92, -95), в Переяславле-Залесском (Переяславль-Залесский-94, -95), на Семинарах в Институте проблем механики РАН (по задачам механики и управления – в 1992 г., по нелинейным задачам механики – в 1993 г.). Публикации на тему САВ и их применения стали появляться в ведущих журналах Программирование, Механика твердого тела, Техническая кибернетика и других, в Сборниках "Пакеты прикладных программ" (Наука, Москва и Новосибирск).

В последнее десятилетие наши специалисты по САВ активнее включились в международное общение ученых, стали широко участвовать в международных научных мероприятиях. Конгресс ISSAC'93 прошел в Киеве (Кiev-93), международными были конференции в С-Петербурге Sanct-Petersburg-93, -94. Прикладники включились в работу конференций IMACS-ACA (Ассоциации по математике и вычислениям в моделировании – Применения Компьютерной Алгебры). На конференции в Праге IMACS ACA-98, Prague-98, ряд секций (сессий, общим числом 18) были организованы российскими учеными, в том числе по механике Механика и динамические системы (В Еднарад, Н Н Васильев), История САВ (Г Б Ефимов, М В Грошева [1998]), Физика высоких энергий (В Ф Еднарад, D Regret-Gallop), Интегрирование и симметрии в ОДУ (В П Гердт, F Schwarz), Алгебра и геометрия (А А, А В Михалевы, G F Pilz), Биология, Экология и Медицина (В Ф Еднарад, Н И Гурин, Н К Зайцев), к механике относилась также секция Управления и робототехники. Исключительно активной и многогодной была секция Образования и обучения – 4 заседания, 27 докладов (в два-три раза больше, чем на других сек-

циях – напр., А В Банщикова, Л А Бурлакова [1998]) В ней участвовало большое число чешских преподавателей, в том числе из колледжей Материалы некоторых секций (этого и других годов) публиковались (С А Гутник, А Д Брюно [1998])

В 2000 году конференция IMACS ACA прошла в Петербурге, в Шуваловском дворце на Фонтанке Во главе организаторов был Н Н Васильев Число участников было скромнее, чем в Праге, но общение – очень активное Приятно было увидеть многих старых знакомых после большого перерыва, узнать о продолжающейся работе по САВ Секция Образования и тут была среди наиболее популярных и активных

Восстановлением старой традиции явилось Совещание в Дубне в 2001 году – Dubna-2001, собравшее большое число участников из многих стран Радовало большое участие молодежи – студентов МГУ, физфака и мехмата и местного филиала МГУ в Дубне Большая часть их многочисленных докладов относились к физике и методу Гребнера Механика также была представлена неплохо В Дубне стали регулярно проводить в конце мая заключительное заседание семинара по САВ в МГУ – в виде однодневного семинара

1.3 Некоторые тенденции конца 1980-х – начала 1990-х годов

Большие конференции по САВ, начиная с Дубны-85, во многом следовали принципу современных международных конференций – на них отдавалось предпочтение сообщениям о системах, реализации алгоритмов и математических методов Из приложений преимущество получали новые нестандартные приложения Механические приложения нередко попадали в разряд привычных, ограниченных в представительстве Например, на европейской конференции EVROCAL'85 в Линце в 1985 г доля прикладных работ была невелика по сравнению с алгоритмическими, аналогично и на других подобных конференциях (см. выше) Среди приложений получали преимущество новые – логика, теория чисел, химия (см. в трудах EVROCAL'85, например, R Pavelle [1986]) Возрос интерес к САВ в связи с логическими направлениями в программировании – доказательствами теорем, верификацией программ и т п Этим темам в Линце были отведены специальные секции Перекликается с этой тенденцией и направленность большого совещания Рабочей группы по САВ (в рамках сотрудничества Академий наук стран СЭВ) в 1990 г в Киеве, где вопросы логического программирования были широко представлены (также Ю В Капитонова, С В Колядя [1985]) Кроме специальных разработок последнего времени, логика присутствовала и в некоторых старых САВ (например, АНАЛИТИК, В А Эльтеков [1988], В М Матросов, С В Васильев и др [1984], см. также Вильнюс-90, Н Н Васильев [1985], Дубна-90)

Прикладные работы сосредотачивались и наиболее полно представлялись на конференциях по специальностям, уже не разделяясь на работы с использованием САВ или без них Этапами освоения специализированных и универсальных САВ в качестве регулярного, обыденного матобеспечения научных исследований стали Всесоюзные совещания по компьютерным методам в классической и небесной механике Ленинград-88, -89 (I, II), -90 и С-Петербург-91, посвященные двум старейшим областям применения САВ – небесной механике и моделированию сложных механических систем (включая вывод уравнений движения) К ним примыкали Всесоюзная конференция Вильнюс-90 и конференция Севастополь-91 (организованная механиками из Пермского университета) Механике деформируемого твердого тела было посвящено Всесоюзное Совещание в Киевском университете (Киев-88, см. гл 3) САВ постепенно становятся стандартным матобеспечением, а символьные аналитические преобразования – привычным инструментом исследователя На конференции Севастополь-91, например, соотно-

шение числа докладов следующее 23-12-5- 16 – по применению САВ, численных методов, общих вопросов САВ и прочих тем

Похожая ситуация видна и по материалам книги W Schiehlen'a [1990] о системах для моделирования динамики систем многих тел по материалам Семинара IUTAM(Мюнхен,1977) и Симпозиума IUTAM/IUTMM(Udine,1985) Описание включает характеристику круга решаемых задач, методики исследования и программной реализации систем Вместе объединены САВ и системы полностью численные Из общего числа 20 систем половина не имеет САВ-компоненты Из первых десяти (по числу пользователей) символьную компоненту имеют 6, но лишь две являются собственно САВ, причем стоят в конце списка лидеров Близкие принципы описания возможностей пакетов (для задач механики – без разделения численных пакетов и САВ) использовались И И Карповым и др [1990]

Совещания Ленинград-88,-89-II (механика систем многих тел) были примечательны тщательным анализом и сравнением представленных методик моделирования динамики сложных механических систем Проанализированы были также особенности САВ и численных программных комплексов, эффективность вычислений, ограничения на вид исследуемых механических систем В Вильнюсе-90 это обсуждение было продолжено На этой конференции были секции механики систем многих тел, механики деформируемого тела, математической физики, систем и алгоритмов и образования (выделенная впервые)

Приложения в небесной механике обсуждались на совещаниях Ленинград-89 (секция 1),-90 и С -Петербург-91, -95 Сюда же можно отнести секцию САВ на Всесоюзной школе-семинаре небесно-механического профиля "Динамика механических систем" (Томск, 1989) Все конференции последних лет сопровождались демонстрацией работы САВ, математических и прикладных пакетов в них

Среди тенденций этого периода одна из важных – интеграция символьных, численных и графических возможностей ЭВМ (Дубна-90, Вильнюс-90, С -Петербург-91,-95, P S Wang [1990], E Engeler, R Mader[1986]) Системы по-разному относят компоненты этого объединения, придают различное значение степени и способам их взаимодействия У САВ Mathematica, наиболее передовой в области сервиса и удачливой на рынке, особое внимание обращено именно на упрощение интерфейса различных типов вычислений, возможность свободного пользования любым из них – как это делает человек вручную Еще одно введение этого времени – «интеллект» программных систем, САВ могут быть тут полезны

Наиболее распространенным в этот период время системам и их алгоритмам посвящены обзоры Н Н Васильева, В Ф Еднерала [1994] (сравнение САВ Reduce, Maple и других), С А Абрамова, Е В Зимы и В А Ростовцева [1992] (по развитию алгоритмов) Интересен проводившийся В П Гердтом анализ материалов международных конференций (С -Петербурга-91) Назовем два любопытных факта Оказывается, специализированные лисп-машины, с которыми связывали определенные планы в развитии САВ, не оправдали ожиданий, так как рост ресурсов обычных машин и совершенствование алгоритмов обеспечили необходимую эффективность САВ (см о рефал-машине в гл 4) Второе – вновь возрастающий интерес именно к приложениям САВ в технологии и механике, вопреки (и в дополнение) недостаточному вниманию к этой тематики на других конференциях

В конце этого периода произошло много важных изменений Сменилось поколение вычислительных машин, сошли со сцены многие САВ и даже языки их реализации Некоторые САВ воссоздавались на ПК, или как пакеты на базе известных универсальных систем, получивших распространение (Reduce, Maple, Mathematica, Macsyma и др) Работы по развитию и использованию САВ продолжались Об этом свидетельствуют конференции хотя бы только 1995 года, на

которых были представлены САВ *Переславль-95*, *С Петербурга-95*, *Bucharest-95*, *Namburg-95* (*EUROMECH 343*) На Международной конференции *Инфосфера-95* в числе пленарных был доклад Д В Ширкова Компьютерная алгебра и ее применение в промышленности, прошел круглый стол Аналитика и символьные преобразования Развивались на новой базе известные пакеты (см А В Банщиков, Л А Бурлакова, Т В Иванова и др.), продолжалась реализация новых алгоритмов (см А Г Сокольский, Н Н Васильев, В Ф Еднерал, С А Абрамов, В А Ростовцев и др) Большой цикл работ по специфункциям реализовался группой О И Маричева, В.С Адамчика в САВ *Mathematica* Применение САВ в механике становится рядовым явлением (И И Карпов [1990], *EUROMECH-343*) Продолжается интеграция символьных, численных и графических средств Причем в последние годы отмечается тенденция к интеграции различных САВ, включению их возможностей в большие численные системы (В П Дьяконов [1999]) Все шире используют САВ в учебных программах, в том числе по механическим специальностям (см *Тула-2005*)

1 4 Использование САВ в обучении и образовании

Роль упомянутых выше семинаров и конференций, конечно, не сводилась к научной или организационной стороне дела Не менее важна была и популяризация новых средств и возможностей вычислительной техники Шаг на пути от пропаганды к конкретному обучению был сделан на Всесоюзной школе Клязьма-87 Д М Клиновым была организована серия лекций по современным универсальным САВ (*Reduce, muMath, Maple*) Пропаганде САВ служили и его доклады – на съезде по теоретической и прикладной механике и др (Д М Клинов [1984, 1986]) Книгу Д М Клинова и В М Руденко [1989] можно рассматривать в качестве учебного пособия по САВ *Reduce*, и также, по применению САВ и *Reduce* в механике

Вопрос о роли САВ в образовании, – как компоненты информационной революции, связанной с компьютеризацией, – содержится в материалах секции по САВ на Международном конгрессе по математическому образованию (Аделаида, Австралия, 1984, см В F Caviness [1986] и объединенный номер *SIGSAM Bulletin* 18-19, 1984, N 4, 1985, N 1) Автоматизированные системы обучения (ACO) уже тогда были достаточно развиты, отмечалось, что САВ в области образования должны занимать особое место – благодаря "интеллектуальности", большому объему информации, конструктивному способу получения ответа и привычной математической форме представления Ведущие САВ, поэтому, можно рассматривать как базы знаний по математическим методам и алгоритмам – уникальные по объему и удобству представления Алгоритмическое богатство САВ, пакетный характер оформления и обращения к алгоритмам позволяют интенсифицировать обучение с их помощью (В Buchberger [1984], E Engeler, R Mader [1986]) Таковы были позиции по использованию САВ в образовании – почти двадцать лет назад

Естественно различать три вида обучения с помощью САВ подготовку специалистов в области аналитических вычислений, обучение работе с САВ широкого круга пользователей и применение САВ в образовании математического (механического) профиля Первое направление реализовалось в специальных курсах и в рамках создания и развития САВ, универсальных и специализированных, при реализации алгоритмов на САВ, путем привлечения к работе студентов и аспирантов Второе направление характеризуется широким знакомством студентов и специалистов с САВ как одним из современных инструментов исследования Третье направление – использование САВ в качестве вспомогательного средства интенсификации образования Успехи на этих направлениях к 1990-му году были неодинаковы По первому, пожалуй, – наибольшие, так как через разработку и усовершенствование различных САВ прошло немало молодых специалистов

Массовое знакомство с работой на САВ происходило уже тогда во многих центрах, с помощью литературы с ними знакомились и самостоятельно. Однако использование САВ в отечественном образовании имело место лишь в немногих случаях – из-за трудностей с вычислительной техникой в ВУЗах.

Применение САВ в образовании требовало выполнения многих условий – изобилия техники (принципиальным шагом стало распространение ПК) или специальных САВ – упрощенных по сервису, уменьшенных по объему. Тогда процесс освоения САВ и использования их в обучении мог идти легко. Например, в Дзлаварском университете появление ПК и специальной САВ тиMATH обучающего профиля (предшественницы Derive, D R Stoulemyer [1986]) резко увеличило число пользователей-студентов при 100 работавших на Macsyma и 200 на Reduce число пользователей тиMATH достигло 500 (B F Caupness [1986]). Другой пример – САВ Mathematica, удобство общения с которой привлекли к ней тысячи пользователей, среди них студентов и школьников. Облегчает обучение и интеграция символьных, численных и графических возможностей на ЭВМ (R Wang [1986], E Engeler и R Mader [1986]). Примеры – САВ Mathematica и Maple с высоким уровнем интеграции всех машинных возможностей (сейчас это есть всходу).

Вклад в подготовку отечественных специалистов в области САВ дали активные коллективы и их семинары по машинной аналитике в вузах Новосибирска, Томска, Москвы, Ленинграда, Киева, Харькова, Перми, Иркутска, Горького и др. (например, см. В В Маланин, А Б Бячков, М Ю Дроздов, и др., А.Г.Свешников и В А Эльтеков, и другие, также табл 3 в гл 2). Во многих ВУЗах читались специальные курсы по САВ, принципам их создания и применению, нашедшие свое отражение в методических материалах и изданиях. Ограничимся несколькими примерами. Одним из них может служить читавшийся много лет курс по САВ в университете Нижнего Новгорода (А Н Безденежных, Я К Любимцев, Р Г Стронгин, М А Чубаров [1992]). Курс М А Чубарова содержал основы создания САВ, построения символьных алгоритмов и смежные вопросы. На его основе САВ использовались в курсах по механике, функциональному анализу, в практикумах и студенческих работах.

Давно и интенсивно использовалась в обучении система АНАЛИТИК, в том числе в преподавании математических дисциплин. Б А Бублик [1978] разработал методики преподавания высшей математики, используя САВ, – так, для контрольной работы готовились задачи и решения в буквенном виде, с параметрами, задание значений которых давало нужное число вариантов. В Киевском университете обучение АНАЛИТИКу объединялось с вычислительными и механическими дисциплинами (В И Савченко, обсуждение – Клязьма-87, Вильнюс-90). Высказывалось предложение применять САВ для облегчения и интенсификации лекций (демонстрации громоздких выкладок) в механических курсах (В И Савченко, В Я Шевченко [1990]). Развитием этого опыта была идея разработки САВ специально для обучения на лекциях. Применялся АНАЛИТИК для обучения и в других вузах (например, Г А Матросова [1990], Ю Б Подчуфаров [1987]).

В конце 1980-х годов ведущее место для задач обучения занимала система Reduce (благодаря сервису и богатству алгоритмов). Достаточно сказать, что большинство руководств по этой системе на русском языке были выпущены в вузах (В Ф Еднерал, А П Крюков, А Я Родионов [1983], М Б Закс [1983], Н И Гурин, А Г Скоморохов [1989]) на основе опыта обучения работе с Reduce. В И Демченко и др. [1983] использовали Reduce для учета тождественных преобразований при проверке ответа, что являлось узким местом для АСО в математике, позже перешли на FORMAC, как более эффективный. Активная группа механиков использовала Reduce для обучения в Пермском университете (М Ю Дроздов, В.В.

Маланин, В М Микрюков [1990]) В Московском авиационном институте Reduce использовался при обучении механике А П Маркееев, С В Медведев, А Г Сокольский [1985]. В Г Веретенников, И И Карпов, А П Маркееев, С В Медведев и др [1990] Опыт подобного рода имелся во многих местах – от Вильнюса до Владивостока – см Вильнюс-90, С-Петербург-91, А С Клоков [1986]

Использование САВ и символьных вычислений в образовании стали со временем все более многочисленны и разнообразны Трудно перечислить даже ветеранов САВ, работающих в эти годы в области обучения в то же время все новые работники и группы включались в это бурно развивающееся направление В В Маланин [1995] в докладе о достоинствах САВ с позиций обучения механике уже на конференции Клязьма-87 (и на других) ставил вопрос об обязательности овладения техникой САВ студентами механиками Это было реализовано на мех-мате университета в Перми в конце 1980-х Сейчас САВ используется там в курсах Теоретическая механика, Системы аналитических вычислений, спецкурсах Идентификация динамических систем, Численно-аналитические методы исследования нелинейных систем, Системы аналитических вычислений в механике, Пакет Mathematica и вариационные неравенства (В В Маланин, И Е Полосков [2001]) Признанием важности постановки вопросов образования с помощью САВ было создание секции на конференции Вильнюс-90 хотя докладов было немного (Ю К Демьянович, А Н Новоселова – [1990])

Велась работа и с помощью специализированных САВ механического проффиля (например, Н В Емельянов [1983], З Е Пейсах, А Б Кикин [1987], данные табл 3 гл 2) Эти САВ, как правило, использовались не для преподавания математических дисциплин, а в курсах по механическим специальностям, на них выполнялись курсовые работы Возможности компьютера в преподавании механики хорошо демонстрирует, например, САВ Д Ю Погорелова [1993] Используя эту систему, студенты Брянского железнодорожного института осваивали теорию и автоматизацию построения уравнений движения механических систем со многими степенями свободы, их декомпозицию, моделирование динамики сложных объектов Все этапы работы иллюстрируются изображениями в реальном времени, выводом графиков Большинства САВ для моделирования сложных механических систем использовались в преподавании (см табл 3 гл 2), – в развитии этих САВ студентами, в механических спецкурсах по динамике систем тел, теории гироскопов, навигации, теории машин, устойчивости Перенос многих из этих САВ на ПК в начале 90-х годов дал новый импульс применению их в обучении благодаря большим возможностям ПК, их сервису и доступности

Заметим, что автоматизация сложных алгоритмов механики с помощью САВ, создание серии пакетов, охватывающих значительную часть цикла исследования механической модели, – ставит серьезные методические вопросы С одной стороны, тонкие механические методы становятся доступнее для широкого круга инженеров и механиков С другой – возникает определенная опасность деквалификации механиков нового поколения, привыкающих во всем полагаться на машину, не умеющих ее контролировать, а подчас и плохо понимающих логику исследования Поэтому усилия по автоматизации современных методов механики (в том числе символьных) должны идти рука об руку с методической работой по изложению этих методов и выработки методики обучения "компьютерной механике", "компьютерной физике" и т п (С В Бирюков [1999], А И Кобрин [2005])

Персональные компьютеры существенно повысили возможности автоматизации образования Возросло количество разнообразных компьютерных учебных материалов (см , выше и, например, Совещания в Туле 1991 и 2005 г по компьютерным методам обучения в теоретической механике – Тула-2005) К сожалению, роль САВ в этом процессе оставалась скромной, не соответствующая их воз-

можностям. Не всегда были готовы к использованию САВ и учебные программы. Так, проф. Л.И. Штейнвольф в *Вильнюсе-90* отмечал устарелую ориентацию ряда программ по сопротому на графоаналитические методы. Международный компьютерный форум в С.-Петербурге CSAM'93 (*St-Petersburg-93*) уделил образованию серьезное внимание – одну из секций (см. В.В. Маланин и др. [1995]), хотя число докладов по САВ было скромным. Одним из центров обобщения опыта компьютеризации образования стал семинар в Московском энергетическом институте по обучающим системам (хотя, как правило, без САВ). Новые возможности – дистанционное обучение, использование удаленных мощных компьютеров, обмен информацией и т.д. – обсуждались на секции Интернет в образовании на Международной конференции *Инфосфера-95*, отмечалось также перспективность САВ.

Массовый переход на ПК, быстрый рост их ресурсов и возможностей, доступность ведущих САВ на них – по новому поставили вопросы о роли САВ в образовании. Благодаря этим факторам сейчас студенты и даже школьники овладевают САВ быстрее и легче, чем старшее поколение, активно пользуются САВ. Использование ведущих САВ с их богатыми возможностями, соединением символьных алгоритмов с численными и графическими средствами компьютера стало общедоступным. Бурно развивается обучение через Интернет (Г.А. Курганская [2001], Тула-2005). Появились многочисленные новые коллектизы использования и развития САВ, например, в Смоленске, Минске, Бресте, Туле и других городах. Активность секций образования на нескольких последних конференциях по САВ отмечена выше, в разделе 1.2 (см. *Минск-97, -99, Prague-98, St-Petersburg-2000* и др.). Работы по системам САВ и участие в этом молодежи развиваются в основном в области реализации алгоритмов. На конференции *Dubna-2001*, например, было большое число студенческих докладов (по методу базиса Гребнера и физике), особенно из числа студентов физ-фака МГУ и его местного филиала и учеников Е.В. Панкратьева с мех-матма МГУ.

В последние годы публикуются большое число материалов и руководств по применению САВ разного рода – руководства по отдельным системам, пособия по применению их в учебных курсах и т.д. Приведем лишь отдельные примеры руководств по ведущим САВ, например, В.П. Дьяконов [1993], Г.В. Прохоров и др. [1998], Е.М. Воробьев [1999], О.В. Зимина [2003], методических материалов – С.В. Бирюков [1995], А.И. Кобрин [2005], решебников – Ю.И. Рыжиков [2000], О.В. Лобanova [1999], А.И. Кириллов [2000], М.Н. Кирсанов [2002], в том числе по механике – М.Н. Фирсанов [2001]. Интернет дает новые возможности (см. Тула-2005), в том числе участия в интернет-семинарах и журналах по САВ, по применению их в образовании (С.В. Бирюков [1995], также Интернет-журнал *Denye News Letter* и др.). Интеграция возможностей САВ и других средств имеет в виду теперь уже не только графику и численные пакеты – это стало обыденным, хотя и тут происходят интересные процессы (В.П. Дьяконов [1999]). Взаимодействие с САВ включает теперь средства работы с текстами (А.И. Кириллов [2000] – работа с САВ из Word) или подготовки публикаций (В.Н. Говорухин, В.Г. Цибулин [1997]).

В то время как использование САВ становится все привычнее, их роль в образовании привлекает все большее внимание, находится среди самых популярных разделов в сфере САВ. Приведем характерный пример. Многолетние труды иркутских механиков по динамике движения системы тел с помощью САВ (А.В. Банщиков, Л.А. Бурлакова и др., М.В. Почтаренко, М.А. Новиков) получили недавно отражение в области образования – как диссертация Т.Н. Титоренко [2002], – в виде руководства и сборника задач по применению САВ.

Глава 2 Системы Аналитических Вычислений и их свойства

Первоначальные шаги в области символьных преобразований на компьютере имели два взаимно дополняющих мотива. Одним был принцип, сформулированный Н Винером, что машину можно научить всему, доступному для человека. Второй шел от потребности практики, – математики, механики, физики – в автоматизации громоздких преобразований формул. В соответствие с побудительными мотивами, развитие САВ происходило двумя путями. С одной стороны создавались системы символьных преобразований или вычислений общего вида (универсальные), с другой – САВ для решения конкретных задач с выражениями и действиями достаточно узкого вида (специализированные). При остром дефиците машинных ресурсов и в отсутствии больших проектов, концентрирующих усилия, все это привело к появлению большого числа отечественных САВ разного рода. Описанию их и их свойств посвящена настоящая глава.

2.1 Использование САВ в цикле исследования

Аналитические вычисления широко применяются в механике. Ниже мы хотели бы показать всю широту их применения, не только и не столько в разнообразии задач – на это будет обращено внимание в гл. 3. Интересно разнообразие ролей, в которых выступают аналитические вычисления – при построении решений в рядах, использовании классических и новейших математических алгоритмов на САВ, в качестве отдельных "кирпичиков" исследования, таких, как специальные арифметики, построение уравнений движения, при построении методов численного интегрирования.

Представление об обширности и разнообразии приложений САВ в механике дадим на примере цикла математического эксперимента А.А. Самарского (В.Я. Карпов, Д.А. Карагин и А.А. Самарский [1978]), предложенного в связи с пакетами прикладных программ (ППП) в математической физике. Цикл этот состоит из следующих этапов:

- 1 Выбор физической модели и формирование математической модели как задачи механики или математической физики,
- 2 Выбор вычислительного алгоритма для решения задачи,
- 3 Создание программы для реализации алгоритма,
- 4 Проведение расчетов и обработка полученной информации,
- 5 Анализ результатов, сравнение с экспериментом. Если нужно, пересмотр физической модели и повторение цикла

Возможны и промежуточные циклы особенности алгоритма могут повлиять на математическую формулировку задачи, потребовать ее модификации, недостаточная точность расчета укажет на необходимость изменения алгоритма, отладка программы образует свои циклы и т.п. Кроме цикла вычислительного эксперимента возможны и другие, близкие циклы исследования, как циклы математической обработки результатов эксперимента или расчета свойств вещества (А.А. Самарский). Цикл вычислений в механике может отличаться от упомянутого, например, исследованием устойчивости движения.

Рассмотрим примеры применения САВ на всех указанных этапах вычислительного эксперимента (Г.Б. Ефимов [1983], М.В. Грошева, Г.Б. Ефимов [1988]).

Этап первый. Физическая или механическая формулировка задачи и вывод уравнений движения (или равновесия, состояния) во многих случаях составляет непростую задачу. Для сложных механических систем, таких как гироколические системы, манипуляторы, роботы, спутниковые системы и т.п., уравнения движения очень громоздки, а их вывод требует большого труда. Велика вероятность

ошибок, и нередко чисто технические трудности становятся препятствием для рассмотрения более сложных и точных моделей явления. Интересно, что среди первых применений символьных вычислений было получение уравнений движения связки тел (см. M S Davis [1968], стр 197). Обзоры литературы по автоматизации вывода уравнений движения – М В Почтаренко [1985], Й Виттенбург [1980]. И Р Белоусов [2002] – можно дополнить материалами конференций (*Горький-84, Дубна-85, Ленинград-88,-89-II, Вильнюс-90, W Scheiben* [1990] и др.)

Символьные выкладки дают возможность автоматизировать вывод уравнений движения, проводить их линеаризацию, замыкание системы уравнений. Для целой группы САВ и ППП построение уравнений движения сложных систем является одной из главных задач, иногда даже основной. Они входят в символьно-численные программные системы с различным уровнем интеграции численных компонент и САВ, в составе САПР. Особенности и варианты таких систем обсуждаются ниже. Схема получения уравнений движения включает формирование потенциальной и кинетической энергии системы, их дифференцирование и преобразование получающихся уравнений. Для систем с большим числом степеней свободы более удобны и эффективны уравнения движения, отличные от классических уравнений Лагранжа, Гамильтона, Эйлера и т п (см. *Ленинград-88,-89-II, А Б Ячков и др [2002], Ю Г Мартыненко [1990]*, табл 3). Объем промежуточных и конечных выражений заставляет иногда воздерживаться от полного раскрытия скобок и приведения всех подобных членов (например, в системе MMANG О М Городецкого [1988]). Универсальные САВ в этих задачах часто неэффективны, большинство САВ этого назначения – специализированные.

В других случаях выбор физической модели – дело менее формализованное и требует диалогового режима работы САВ, большего разнообразия символьных выражений и богатства алгоритмов. Пример последовательного получения уравнений движения в механике плазмы с замыканием системы уравнений состояния, линеаризацией нелинейных уравнений, получением высших приближений и т п приводят А Вегс, J L Кир и С Р Ф Катеу [1976], демонстрируя возможности САВ MACSYMA.

Методы теории групп в виде символьных алгоритмов дают возможность учитьвать симметрию задачи для упрощения исходных уравнений или поиска свойств решений, интегрируемости (М М Бежанова, В Л Катков и И В Погтосин [1972], В Л Катков, М Д Попов [1984], F Schwarz [1982], В П Гердт, А Ю Жарков [1984], В В Корняк [1985, 2001], В Л Топунов [1975], Л М Беркович [1975], А В Бочаров [1989] и др – *Горький-84, Дубна-85, Dubna-90,-2001*). Эти методы используются в механике сплошных сред, в физике, общей теории относительности.

На этапе втором, дискретизации и выбора алгоритма также имеются громоздкие операции. Так, методы Ритца и Галеркина хорошо реализуются в рамках символьных вычислений (С Я Герценштейн и др [1984]), однако требуют символьного вычисления определенных интегралов. Успешно используются САВ в методе конечного элемента (А С Гульбинас [1984], Р А Бараускас [1984], А Л.Ляхов [1998], *Вильнюс-84, Горький-84, Вильнюс-90*), при построении методов численного интегрирования высокого порядка (Ю А Федяев [1982]), при построении и исследовании разностных схем (М Ю Шашков, И Б Щенков [1983], А Н Валиуллин, В Г Ганжа и др [1981], С И Мазурек и В П Шапеев [1986]). В задачах устойчивости (в том числе при анализе алгоритмов и вычислительных методов) необходимо вычислять характеристические полиномы, причем без потери точности.

В теории управления и оптимизации САВ облегчают получение уравнений сопряженной вектор-функции, уравнений в вариациях (нужные также в задачах коррекции, навигации, при решении краевой задачи). Современные методы ре-

шения краевой задачи ("продолжения по параметру". В Г Петухов [2004]) сильно расширяют возможности исследователя, но требуют построения большого числа уравнений вспомогательной системы. Для автоматизации этого процесса САВ могут быть полезны. Формально эти действия можно отнести к этапу организации вычислений, но по существу они примыкают к выводу уравнений движения. Получение громоздких уравнений движения или равновесия в механике сплошных сред на основе вариационного принципа может проводиться с помощью САВ.

Этап третий. При программировании САВ также могут быть применены, – например, для автоматизации формирования громоздких правых частей уравнений движения. При этом уменьшается вероятность внесения ошибок. Символьные выражения превращаются в фортранные операторы (или аналогичные), при формировании программы может быть проведена оптимизация счета на различных уровнях (J A van Hulzen [1983]). Имеются программы оптимального построения процесса вычисления значений громоздких символьных выражений, рядов Пуассона (Н Н Васильев [1985]), программы анализа потери точности (Ю К Демьянович [1989]), анализа программ и проверки размерностей (В Л Катков [1990]).

Немалую пользу может дать возможность построения независимого (пусть громоздкого и неудобного) решения – как теста при отладке сложной задачи. Таким может быть решение в виде рядов (A Deprit и A R M Rom [1968]). Автоматизация вывода разностных схем (см. выше) одновременно автоматизирует и часть программирования. При выводе уравнений движения с помощью САВ генерируются и программы счета правых частей для численного моделирования динамики механической системы. Современные САВ (например, MATCAD) позволяют строить систему уравнений при оптимизации, при выборе удобных переменных для сложных задач – в интерактивном режиме, с автоматическим переходом к моделированию и графическому представлению результатов. Использование САВ часто уже не упоминается (М С Константинов и др [2001]).

Отладка программ в некоторых случаях упрощается при совместном использовании символьных и численных вычислений – благодаря применению языков высокого уровня и сервиса, имеющегося в САВ. Об этом свидетельствует опыт применения САВ АНАЛИТИК на специализированных ЭВМ (на МИР-2 в качестве интеллектуального терминала к БЭСМ-6 и на ЕС-2680 в качестве диагностической компоненты в многопроцессорном комплексе). Отсутствие погрешностей округления, характерное для многих САВ (арифметики целых, рациональных или вещественных чисел бесконечной и заданной точности – А В Корлюков [1985], А В Кузьмин [1980], С Ю Войцеховский и Г С Теслер [1991], Н Н Глазунов [1985]) открывают новые возможности в алгоритмах счета, исследовании устойчивости, контроле интегралов движения и т.п. Используются САВ и для доказательства правильности программ – этому была посвящена специальная секция на Конференции EVROCAL-85 в Линце.

Этап четвертый. Решение в формульном виде, аналитическое или приближенное, ценно тем, что дает не одну траекторию, а целое семейство, с явной зависимостью от параметров. САВ позволяют получать приближенные аналитические решения в громоздких задачах – D Barton [1966] за минуты счета повторил и продолжил работу Ch Delaunay, на которую тот потратил 20 лет. Аналитическое представление результатов облегчает проведение качественного анализа решения. Исследование устойчивости движения механических систем – "коронная" задача многих САВ для механики (см. ниже). В некоторых случаях представление результатов расчетов (даже полученных численно) в символьном виде целесообразно – Ф Ф Дедус [1990], П А Калинченко [1990]. При расчете траекторий искусственных и естественных небесных тел громоздкие решения задач небесной

механики, полученные в виде рядов Пуассона (пригодные на больших интервалах времени), можно преобразовать в компактные представления полиномами Чебышева (см НН Васильев [1980]), свои на каждом, сравнительно коротком временном интервале (A Deprit, W Poplarchek и A Deprit-Bartolome [1976]) Так обычно поступают (и без использования САВ) при расчетах полетов космических аппаратов. Плодотворно сочетание символьных вычислений с численными и с машинной графикой 10-15 лет назад об этом специально говорили – P SWang [1990], E Engeler и R Mander [1986]. Сейчас такой режим обычен и естественен

Этап пятый. Символьное представление результата с явной зависимостью от параметров, характеризующих явление, может облегчить сравнение расчетов с экспериментом. К этому разделу можно условно отнести и выбор числа последовательных приближений в зависимости от требуемой точности расчетов (в методе теории возмущений, в рядах небесной механики, В А Брумберг [1974], A Deprit и A R M Rom [1968], Г Б Ефимов [1970]) Близко по идеи и может быть отнесено к данному этапу – использование САВ при планировании эксперимента или в системах проектирования, когда аналитические выкладки облегчают перебор вариантов и варьирование параметров математической модели физического явления САВ входят в такие системы в качестве одной из компонент (см ниже, в 2.4)

Перечисленные примеры показывают разнообразие применения САВ на отдельных этапах вычислительного цикла. Обычно символьные вычисления используются на нескольких этапах сразу. Например, при построении решения задачи в виде рядов – в задачах небесной механики (ряды Пуассона, В А Брумберг [1974], J Kovalevsky [1968]), общей механики (ряды Тейлора, A R LeScharck и P Sconzo [1968], ЛФ Белоус и Е Е Корольков [1981]) или механики сплошной среды (Л Н Платонова и М Ю Шашков [1983], в методах Ритца и Галеркина – С Я Герценштейн, Е Б Родичев и В М Шмидт [1984]). При этом аналитические вычисления охватывают второй, третий, четвертый этапы, а иногда и пятый, если стоит вопрос о точности решения и сравнении его с точностью наблюдения. В задаче представления нелинейных волн в плазме рядами (A Bers и др [1976]) в цикл, кроме этапов 2-4, включается и 1-й этап – построения физической модели.

В большинстве случаев в циклах исследования на компьютере символьные вычисления чередуются и комбинируются с численными методами. В начале развития САВ одни из систем стремились "хранить чистоту" символьных преобразований, другие (АНАЛИТИК, СИРИУС) – использовали комбинированные вычисления. По мере решения все более сложных задач доля смешанных вычислений увеличивалась. Взаимодействие и сочетание обоих режимов счета достигает в современных САВ высокого уровня интеграции, как и при работе человека (W Schiehlen [1990], E Engeler и R Mader [1986], В П Дьяконов [1999]). Уровень такой интеграции (САВ, графики и численных вычислений) постоянно возрастал, сейчас в ПК он достаточно высок и воспринимается как естественный.

Возможны вариации цикла исследования. Так, при автоматизации построения управления программным движением манипулятора, САВ Р А Сабитова [1977] (также А С Земляков, Р А Сабитов, Е И Сомов [1977]) выполняла следующие этапы вывод уравнений движения, построение управления определенного класса с учетом ограничений и требований к качеству переходного процесса, построение упрощенного управления с учетом возможностей ЭВМ, моделирование управляемого движения и проверку качества предложенного управления. Формирование программы в командах управляющей ЭВМ. Последние этапы проводятся, очевидно, без помощи САВ. Последовательность этапов отличается от цикла А А Самарского формированием программы для управляющей ЭВМ (так сказать, этапом внедрения результатов вычислительного эксперимента). При исследова-

нии устойчивости механических систем цикл исследования проходит также несколько иначе и заканчивается изучением свойств механической модели

В последние годы САВ получает новые области применения. Так, расширение языка АНАЛИТИК-93,-2000 (В П Клименко, А А Морозов, Ю С Фишман и др [1995]) и использование его для автоматизации описания структур, поиска решения сложных, громоздких задач охватывает (пусть частично) формализацию описания, выбор алгоритма, построение программы (программного обеспечения). Особенность такого применения САВ, как и других языков описания высокого уровня (например, рефала, см гл 4) – не только и не столько автоматизация преобразования формул, но согласование, стыковка большого числа структур, данных и отдельных фрагментов вычислений (В П Клименко, А Л Ляхов [2003])

Математические алгоритмы, имеющиеся в САВ, существенно обогащают возможности исследователя механика. Заметим, что даже алгоритм раскрытия определителя высокого порядка или решения системы линейных уравнений в буквеннном виде достаточно специфичны и сложны для непрофессионала. В то же время, оформленные в виде символьного пакета, подобные алгоритмы предоставляют пользователю хорошие возможности. Пакеты для вычисления определенных и непределенных интегралов широкого класса, интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений охватывают большую часть известных случаев (и большую часть соответствующих справочников). Так как в пакетах САВ заложены конструктивные алгоритмы, с их помощью находятся еще неизвестные случаи интегрируемости, а также могут проводить преобразования свидетельства к ним от иной исходной формы записи (к сожалению, эта важная возможность не всегда на уровне даже в современных системах). В отечественных системах такие сложные алгоритмы развивались медленно – назовем систему интегрирования АНАЛИТИКА, начиная с первых его версий – Ю С Фишман [1973]

Пакеты для работы со специальными функциями (интегралы от специальных, их преобразования, приведения от одних функций к другим) также расширяют возможности механика. Методы теории групп позволяют изучать наличие первых интегралов у сложных систем нелинейных дифференциальных уравнений. Это дает важную информацию о механических явлениях, которую трудно получить без помощи САВ из-за громоздкости выкладок. Имеются методы и пакеты решения систем нелинейных уравнений, исследование их совместности, существуют пакеты для построения аппроксимаций, асимптотик различного вида, отыскания пределов и многие другие алгоритмы – из достаточно высоких и специфических разделов алгебры, теории дифференциальных уравнений, анализа и математической физики (например, Дубна-85, Дубна-90, А А Боголюбская, В П Гердт, О В Тарасов [1988], Л М Беркович [1975], Б А Полов [1984], R Pavelle [1986], В С Адамчик, О И Маричев и др [1992], А В Бочаров [1989], С А Абрамов [2001], А В Ниukkanen [2003])

Использование специальных разделов математики (специальных, асимптотик, разложений, методов теории групп или теории дифференциальных уравнений) позволяет по иному строить и сам цикл исследования. Математические модели могут исследоваться на ЭВМ и качественными методами, и количественно с определением первых интегралов, симметрий, взятием квадратур – при помощи САВ. Вне САВ многие из этих разделов нелегко включить в арсенал вычислительных средств на ЭВМ. Недавний пример – получение интегралов А С Купешовым [2002].

Разнообразие применений САВ в механике, их роли и функций в процессе исследования (при постоянном дефиците ресурсов ЭВМ и отсутствии развитых и доступных САВ) приводило к появлению многих САВ и символьных пакетов. Это необходимо иметь в виду при их сравнении и оценке. Действительно, как сравни-

вать САВ для работы с рядами Пуассона (содержащих тысячи одночленов) с простенькой САВ дифференцирования в узком классе выражений (при автоматизации вывода уравнений движения) или модулем точной арифметики в составе численной программы. Но каждая из них имела свою область приложения, была связана с решением нужных задач – и была создана в ответ на потребность практики.

2 Классы задач, использующих символьные преобразования, и типы САВ

Описание истоков имевшегося многообразия САВ и множества их начнем с разбиения задач, использующих САВ, на классы или типы задач, а также с различия режима исследования, в котором они решаются (М В Грошева, Г Б Ефимов [1988], Г Б Ефимов [1989]). Одна группа – это задачи "вычислительного" типа, при решении которых громоздкие вычисления проводятся автоматически, по регулярному, заранее заданному и ясному алгоритму, без необходимости в помощи исследователя. Среди них можно выделить три класса задач "вычислительные", с большим объемом громоздких символьных преобразований, решающих большую часть задачи (несколько этапов цикла вычислений), задачи с символьным выполнением какого-то одного этапа цикла вычислений среди других этапов, выполняемых численно (назовем это "алгоритмом"); задачи с символьным выполнением какого-то одного действия, операции (назовем это "действием").

К первому классу можно отнести, например, построение решения в рядах Пуассона в небесной механике. Ко второму – задачи вывода уравнений движения при моделировании сложной механической системы, построение разностных схем или матриц жесткости в методе конечного элемента. К третьему классу – использование в численных программах символьного дифференцирования или специальной арифметики, реализованной в САВ (бесконечной, задаваемой точности, интервальной и других).

Другие задачи – "поискового" типа (и режима работы), требующие активного взаимодействия исследователя и ЭВМ, поскольку путь получения решения не вполне ясен заранее и отыскивается вместе с решением. "Поисковые" задачи, как правило, требуют сочетания символьных и численных вычислений, достаточно гибкого – ведь не все этапы работы возможно предвидеть или удобно проводить в символьном виде, а результат часто требуется доводить до числа. Особый тип – задачи обучения с помощью САВ, с выделением обучения машинной аналитике и использованием САВ в математическом и техническом образовании. Еще одна группа задач поискового типа – разработка и реализация символьных алгоритмов общего или прикладного назначения, "алгоритмические" задачи.

Подобно разнообразию типов задач, системы аналитических вычислений, большие и малые, разделим на группы. Принято различать САВ универсальные и специализированные. Продолжая классификацию, выделим их основные типы. Это разбиение полезно при осмыслении нами всего многообразия САВ. Современные распространенные САВ относятся к большим универсальным, другие типы САВ соответствуют их пакетам, подсистемам и т.п. Возможно, что в будущем потребуется классифицировать и эти современные САВ и их библиотеки пакетов.

Универсальные системы отличаются общностью символьных данных, разнообразием выполняемых преобразований, богатством аналитических алгоритмов, развитым сервисом и численно-символьным интерфейсом. Накопление алгоритмов, общематематических и прикладных приводит САВ к новому качеству – назовем это "большой универсальной системой". Примером одной из первых таких систем является САВ MACSYMA. Объем вложенного в нее труда (к середине 1980-х, в рамках большого проекта по искусственному интеллекту "Человек и

"Машина") весьма велик порядка ста человеко-лет на саму систему и общематематические алгоритмы и втрое больше на прикладные подсистемы. Особенности подобной САВ богатство возможностей, алгоритмических и "интеллектуальных", доступность в ведущих научных центрах, мощная информационная поддержка, целенаправленное развитие. Информации о возможностях MACSYMA было посвящено немало публикаций, — например, R.Pavelle [1986], A.Bers и др. [1976], J.Moses [1974]. Представление об ее общих математических алгоритмах (R.Pavelle) предельно, производные, упрощения, факторизация полиномов, бесконечные суммы, неопределенные интегралы, определенные интегралы, преобразование Лапласса, обыкновенные дифференциальные уравнения, ряды Тейлора и Пуасона, действия с векторами, матрицами и тензорами, решение систем нелинейных уравнений, выход на численный счет (генерация Фортранных программ).

Среди приложений MACSYMA механические задачи занимали большое место — во внушительном списке больших прикладных подсистем (R.Pavelle [1986], M.B.Грошева, Г.Б.Ефимов [1988]) механические составляют почти 40%.

акустика	теория управления	теория оптимального управления
эконометрика	теория деформаций	метод конечных элементов
физика частиц	небесная механика	подводные ударные волны
термодинамика	механика жидкости	расчет баллистической защиты
методы генетики	робототехника	алгебраическая геометрия
расчет БИС	структурная механика	общая теория относительности
теория антенн	механика полимеров	ядерный магнитный резонанс
физика плазмы	расчет пропеллеров	расчет электронных микроскопов
метод максимального правдоподобия	динамика вертолетов	интерферционное разрешение
	эмulsionционная химия	вычислительный анализ
	физика твердого тела	обработка эксперимента

MACSYMA — пример целенаправленного руководства развитием символьных преобразований. Список ее применений показывает роль механики в развитии САВ, обширность применения САВ в ней. Она во многом было прообразом современных САВ по объему сервиса, возможностей и алгоритмов.

Исторически большая универсальная САВ была лидером в аналитических вычислениях и ускорителем их развития. При работе в каждом из разделов аналитических вычислений (разработка систем, приложения, развитие алгоритмов) в подобной САВ есть, что выбрать и чем воспользоваться. Большинство новых разработок быстро в ней реализовались, находили применение, могли быть переданы в другие САВ или быть воспроизведены в них. Примеры демонстрации всех новинок по САВ можно увидеть в Трудах ежегодных конференций пользователей MACSYMA. Эта САВ развивалась в исследовательских центрах, как видно и из списка приложений, для нас она была совершенно недоступна. Закрытость и слабое распространение в университетах замедлили ее развитие впоследствии. Сейчас имеется ее усеченная версия на ПК, конечно, без прикладных пакетов.

Среди отечественных систем больших универсальных САВ не было (из-за отсутствия программы развития и дефицита ресурсов), имевшиеся в разное время САВ-лидеры не достигали этого уровня. Были разработаны ряд универсальных САВ, с различными уровнями сервиса, алгоритмического наполнения, с разной степенью завершенности, — например, АНАЛИТИК, АУМ, АЛЬКОР, АВТОАНАЛИТИК, САВАГ, СИРИУС, SANTRA (см. ниже, 2.5 и М.В.Грошева [1985, 1988]). К универсальным относятся Reduce, MATHEMATICA (достигшие уровня "больших", J.A.van Hulzen и J.Calmet [1983]). В последнее время уровня больших универсальных САВ достигли ведущие САВ на ПК (и выполняют ту же роль в развитии

аналитических вычислений – В П Дьяконов [1999]) Однако когда ПК только начались, имели ограниченные ресурсы, предлагались пути сочетания большой универсальной САВ и САВ на ПК – научные станции как база с комплексным численно-символьно-графическим обеспечением, с символьной частью на базе MACSYMA, формирование «персональной» САВ-библиотеки на ПК из ее возможностей (В F Caviness [1986]) Сейчас такое сочетание может осуществляться с помощью Интернета.

Иной тип представляет малая универсальная САВ, располагающая относительно скромными ресурсами, с уменьшенным алгоритмическим арсеналом, но широко доступная (сейчас на ПК, раньше – на малых машинах) Одна из сфер ее применения – инженерные задачи, как это было подчеркнуто в названии первой в мире машины, имевшей аппаратно реализованную САВ – МИР-2 (Машина для Инженерных Расчетов – В М Глушков, и др [1971], Ю С Фишман и др. [1974], В П Клименко, Ю.С Фишман и др [1981]) Специфика малой универсальной САВ доступность, дружественный сервис для широкого круга пользователей, единство символьных и численных вычислений, эффективные алгоритмы в сочетании с разумными требованиями к ресурсам

САВ для обучения также можно отнести к универсальным, так как требования к ним близки Естественно использование для обучения универсальных САВ, в том числе малых Специфика обучения с помощью ЭВМ ставит особые вопросы о психологоческих его аспектах, о роли и возможностях диалога, об излишнем доверии к работе машины и САВ, о проверке результатов, о накоплении и закреплении навыков при переходе от обычного обучения к компьютерному (С В Бирюков [1999]) Вопросы имеют общее значение, но при обучении встают особенно остро. Создаются и создавались специальные САВ и версии для обучения (В F Caviness [1986], В П Дьяконов [1999]) – например, miMATH (D R Stoutemyer [1986], приемница ее – Derive) Для обучения используются и проблемно специализированные САВ – по специальной научной дисциплине, разделу физики, механики или математики, для которого создана эта САВ (см выше 14, также Вильнюс-90 и табл 3 в 2 4)

Специализированные САВ ориентированы на решение узкого круга задач, поэтому у них часто уменьшены по сравнению с универсальными системами общность символьных выражений, разнообразие выполняемых преобразований и алгоритмов За счет специализации повышается эффективность работы, появляется возможность решать более трудные, громоздкие задачи Системы эти обычно проще устроены, возможны при более скромных ресурсах ЭВМ, многие из них создавались прикладниками для своих задач Выделим три типа специализированных САВ проблемно специализированные, алгоритмические подсистемы и алгоритмические модули или блоки

Разделение универсальных и специализированных САВ во многом условно Так, полиномиальные системы имеют обширную область применения и достаточно общий тип символьных выражений. J A van Hulzen и J Calmet [1983] предлагали считать их универсальными Но полиномы – частный вид математических выражений, а их преобразования составляют лишь часть символьных преобразований общего вида Поэтому, если лет 20-30 назад полиномиальные САВ воспринимались как универсальные, сейчас их правильнее считать специализированными – по виду допустимых выражений Именно так, в качестве подсистем они входят в состав многих универсальных САВ (АРАП А Л Семенова [1980] в составе АУМ Н А Калининой и И В Потосина [1977] и т п) Ряд специализированных САВ по мере развития структуры и алгоритмов превратились в универсальные (напр , Reduce, АЛЬКОР) или приблизились к ним (ВИБРАН) – см табл 2

Проблемно специализированные САВ создаются для решения определенных прикладных задач. Есть системы для исследования устойчивости сложных механических систем, для моделирования их динамики (символьно-численные), для построения в рядах решений небесно механических задач, для задач общей теории относительности, квантовой электродинамики, для нахождения симметрий и интегралов систем дифференциальных уравнений, для задач алгебры, логики и т д (Горький-84, Дубна-85, Дубна-90, Аналитические ППП-88, J A van Hulzen и J Calmet [1986], N I Cohen, O Lepnje, Y Sunblad [1976], М В Грошева [1985,1988] и др , также в гл 3) Вид используемых символьных выражений и преобразований определяется назначением системы Требования к сервису, диалогу, внешнему языку могут быть существенно ослаблены. Но может создаваться и специальный сервис, – например, диалоговый подсказчик для ввода данных о механической системе, исследуемой с помощью САВ (М В Почтаренко [1985]) От проблемно-специализированных САВ требуется эффективность, совершенство методов и алгоритмов, численно-символьный интерфейс (который развивался в направлении интегрирования численных, символьных и графических возможностей – как мы видим в современных ПК)

Отдельные символьные алгоритмические подсистемы реализуют определенный алгоритм Такие подсистемы могут быть частью САВ, универсальной или специализированной, но полезны и отдельно, в составе численного комплекса, когда символьные вычисления имеют преимущество перед численными на определенном этапе цикла вычислений Она может включаться в другую САВ целиком (как в САВ АНФОР и СИРИУС) Особенno важны общематематические подсистемы (взятие интегралов от определенного класса выражений, работа со специфункциями, метод базиса Гребнера, полиномиальные подсистемы и т п) в силу широкой сферы их применения, трудности разработки и эффективной реализации алгоритмов

Еще более частную задачу решают символьные блоки для выполнения символьного действия или элементарного алгоритма (символьного дифференцирования, специальной арифметики) Эффективность и алгоритмическое совершенство – главные требования к таким блокам Автономность полезна для использования в составе численных программ, отдельно от САВ В свое время автономное, в рамках численного счета, использование "САВ-алгоритмов" и "блоков" представлялось актуальным и активно обсуждалось Сейчас многие вопросы решаются на ПК в рамках пакетов САВ или их сочетания с другими системами, в "калькуляторах" с присутствием САВ, как, например, в MathLab

Имеется определенное соответствие типов САВ и классов задач – в одних случаях очевидная ("алгоритм" или "блок" среди задач и "подсистема" или "блок" у САВ), в других менее прямая Так, специализированная САВ соответствует скорее задаче вычислительной, чем к поисковой, но не всегда Описание типов САВ параллельно с классами решаемых задач позволяет яснее почувствовать специфику каждого из них, может быть полезной при анализе и прогнозе В процессе развития конкретной САВ, использовании ее в различных ролях (универсальной, обучающей, библиотеки модулей-алгоритмов) наиболее важными, ведущими оказываются разные свойства и возможности Например, Reduce, развиваясь из специализированной САВ, сохраняя (особенно в первых версиях) следы структуры, не вполне отвечающей ее роли универсальной системы, постепенно совершенствуясь Анализ возможностей САВ АНАЛИТИК (обсуждение АНАЛИТИК-91 на школе в Жукове в 1991 г , также Святостояния-91, Г Б Ефимов [1989]) с точки зрения функционирования и развития в различных ролях также показывал разнородность приоритетов Простота и компактность важнее для ин-

женерной САВ или задач обучения, общность – для универсальной системы, автономность – для интересных алгоритмических модулей или блоков и т п

Другой подход для анализа дает "кибернетическая аналогия" – поиск соответствия между "способностями" САВ и интеллектуальной деятельностью человека (Г Б Ефимов, Е Ю Зуева [1991]) По аналогии с видами научной деятельности могут определяться перспективы применения САВ – наряду с автоматизацией громоздких алгоритмизуемых преобразований, – в обучении и математическом образовании, при создании математических справочников, при реализации алгоритмов

2.3 Описание САВ и их свойств

Задача классификации множества объектов некоторой области встает, когда их число и разнообразие велико, необходимо найти способ ориентироваться в этом многообразии, а также объяснить его внутренние закономерности В программировании и вычислительных методах интеграции к классификации связан с обилием и разнообразием матобеспечения, имеющегося в некоторых прикладных областях (Д С Сильвестров [1988], И Е Полосков [2004]) Благодаря классификации достигается стройное описание этого множества с его особенностями, достоинствами и недостатками, выясняются "белые пятна", выявляется возможность разделить "сфера влияния" между параллельно работающими коллектиками, переходить от конкуренции к координации усилий Раскрытие внутренних причин и закономерностей наблюдаемого многообразия указывает на пути его развития и эволюции

Многогранность области аналитических преобразований, разнообразие возможных решений и имевшихся в определенный момент САВ ставили задачу их классификации и описания их свойств неоднократно За время развития компьютерной аналитики и по мере того, как менялись основные ее проблемы и достижения, менялся и ракурс, под которым проводилось сравнение различных систем, и подход к их описанию. В первых обзорах по САВ (D.Barton и J.P.Fitch [1972], M S.Davis [1968]) они характеризовались языком реализации, формой записи объектов, проводилось их сравнение по виду программ и представлению результата на примере специальных тестовых задач J.Moses [1971] (также J.A van Hulzen, J.Calmet [1983]) интересовался внутренним устройством САВ (в чём ему виделась их суть и источник других их свойств), способом выполнения преобразований, структурой САВ, дифференциацией или единобразием в обработке выражений В проблемных областях давалось описание САВ, их особенностей и достоинств с точки зрения определенного класса задач (J Kovalevsky [1968], W.H.Jefferys [1971], M В.Почтаренко [1985], R.A D'Inverno [1975], H.I.Cohen, O.Lepplge, Y Sunblad [1976], Ленинград-88, -89-II). Таким образом, классификация САВ проводилась под углом зрения системных, прикладных, сервисных их свойств, особенностей и возможностей – по отдельности

Комплексный подход к описанию свойств САВ по образцу описания ППП (М М Бежанова [1980]), с выделением системной компоненты, проблемного наполнения и "организационной" или информационной поддержки был предложен М В Грошевой и Г Б Ефимовым [1983] (и Информатор-83) САВ описываются в этом случае комплексом свойств и характеристик, достаточно разносторонне (об алгоритмической оснащенности САВ – те же работы и М В Грошева [1985]) Такое описание могло дать потенциальному пользователю достаточное начальное представление, – чем можно воспользоваться среди имеющихся САВ

Классификация типов САВ, параллельно с классами решаемых задач дана выше Ниже, в таблице 2 (из работы М В Грошевой и Г Б Ефимова [1988]), дается пример комплексного описания по единой схеме ряда отечественных САВ, универ-

Таблица 2. Характеристики некоторых САВ

1 Название САВ применен	2 Область реализаций САВ	3 ЭВМ, язык входн яз	4 Основн объекты	5 Коэф- фиц	6 Распредел памяти, объем САВ	7 Режимы работы	8 Ввод/вывод числ счт	9 Структура документации
УПП Спец-я	Небесн механ	БЭСМ-6, ЕС Эльбрус Фортр PS-Фортран	Ряды Пуас- сона вещ компл	Цел рац вещ 2точн	Динам Автм.обмен 100зонМЛ диагн	Ред.диал арх.прогр Пакет	Мат вид в 2 уровн формат,прогр быстр	Библ.модул пакет,инстр ФАП
GRFTOS Спец-я	Общ Теор Отн Фортр PS-Форт	БЭСМ-6, ЕС Эльбрус индкс лог.выр	Тенз индкс форкт лог.выр	Цел рац	Динам 40зонМЛ	То же	Мат вид в 3 уровн, подст прогр счета	Система инстр ФАП публикации
Автодана- Литик Универс	Небесн механ проектир	БЭСМ-6 Маш коды Автоанал	Анал выраж Полином	Вещ	Динам Вирт обмен 60зонМЛ	Ред.диал диагност пакетный	Мат вид подстан стык с ЧМО	Система модули,инстр публикации
ВИБРАН Спец-я	Колеб стр. мех Обучен	ЕС, СМ Фортр Вибран	Полин рац ф. триг.ряд,матр	Вещ	Стат динм ЕС 130 КВ	Диагн вид диалог	Ф/вид Зур графор, подст пакетн	Система мод.уч.поб публикации
АЛЬКОР Универс	Механ упруг диф.ур	БЭСМ-6, ЕС СМ рефал Алькор	Полин рац вещ матр пр разр	Динам	Диагн вид Фрт.ПЛ-1 пакетн	Фрт.ПЛ-1 пакетн	Фрт вид програм	Система инстр публикации
Алгебра-О Спец-я	Устойч радиосхемы Физика	ЕС Фортр яз данных	Полин рац кмпл матр	Цел вещ 2 точн	Динам 10 тыс	Диал пакетн	Форт вид вых на счет числ и обсп	Библ.модл инстр публикации
САВАГ Спец-я	Анализ механ Асимптот	БЭСМ-6 Алгол-ГДР Алг-ГДР	Произв выраж матр	Цел вещ рац	Динам 200 зон МЛ	Диагн рад.диал пакетн	Алг.вид вых.счет и обратно	Библ.модл инстр публикации
MLR Спец-я	Механ устойч	БЭСМ-6 Алгол-ГДР ЯПУ	Произв вых стрк симв	Цел вещ	Динам арх форм 35 зон	Диагн диал пакетн	Алг.вид подст	Библ.модл ФАП, инстр публикации
MMANG Спец-я	Общая механ	ЕС Рефал яз задан	Произв вых функци	Цел вещ зад.точн	Динам вн файл 300KB	Диагн диал пакетн	Форт-вид подст програм	Система ФАП публикации
АУМ Универс	БЭСМ-6 ЯРМО. Автокод АУМ	Эльбрус Правила процедур	Пр вых Цел рац	Стат дин 23тыс	Диагн ред.диал	Форт-вид подст мод.инстр	Система ФАП	Система ФАП публикации
АРАП Универс	Хим Полином кинетика	БЭСМ-6 ЯРМО. Автокод вход яз	Полин рац фунц пр тчн	Цел рац	Динам 80зон	Диагн диал	Форт-вид подст	Система модул.ФАП публикации
АНАЛИТИК Универс	Мех обучен идр	МИР-2, СМ Аппаратно Аналитик	Произв вых вещ.рац пр тчн	Цел вещ рац	Динам САВ 70 ОЗУ СМ 248KB	Ред.диагн диал	Мат вид подст	Система ФАП инстр.тех.оп публикации
СИРИУС 2 Универс	Физика рефал, Спутн Сириус	ЕС Спутн пр вых	Полин рац компл пр разр	Цел вещ вирт	Ред.диагн развитые	Мат.вид 1, 2 уровн	Система инстр школа публикации	
Reduce-2 Универс	Физика механ математ	ЕС СМ лисп R-лсп матр	Пр вых Редьюс вект	Цел вещ рац	Динам вн файл 350KB	Ред.диагн диал пакетн	Мат вид 1, 2 уровн подст прогр	Система инстр.пакет публикации

ерсальных и специализированных. Характеристики их распределены по следующим группам: название и тип САВ, область применения, ЭВМ и языки (реализации и входной), арифметика коэффициентов (целая, рациональная и т.д.), распределение памяти (статическое или динамическое) и объем системы, режимы работы и сервис (редакторы, диагностике, архивы и т.п.), формат ввода/вывода и тип численного интерфейса (подстановка значений, формирование программ, выход на численное матобеслечение – ЧМО), структура САВ и тип документации (библиотека программ, модулей, система, пакет, в фонде алгоритмов и программ – ФАП и т.п.). Дополнительные данные по САВ см разделах 2.4 и 2.5. Используемые сокращения – достаточно общепринятые.

Большинство отечественных САВ уступали возможностям современных зарубежных САВ, приходившим им на смену в конце 1980-х, особенно с появлением ПК (по сервису, алгоритмам, – см. J A van Hulzen и J Calmet [1983], Дубна-90). Каковы эти САВ, пришедшие на смену нашим САВ прежних поколений? По данным В.П. Гердта (обзорный доклад на совещании С.Петербург-91), к широко распространенным универсальным САВ на начало 1990-х можно было отнести (С.А. Абрамов, Е.Б. Зима, В.А. Ростовцев [1992], Н.Н. Васильев, В.Ф. Еднерал [1994], также ряд руководств, уже на русском языке, – см. например, В.П. Дьяконов [1993], О.В. Зимина [2003]):

Reduce (для физиков и инженеров),

MACSYMA (для инженеров и ученых),

Mathematica (для широкого круга пользователей, учащихся, инженеров),

Maple (для ученых, по богатству алгоритмов приближается к MACSYMA),

AХIOM (преемник Scratchpad-II, для математиков).

Derive (преемник tиMATH, для учащихся)

Они развиваются и поддерживаются специальными группами и фирмами.

Среди этих САВ также существует своеобразное разделение "ролей" – одни рассчитаны, в первую очередь, на ученых, другие – на самого широкого пользователя. Соответственно различаются они по эффективности, наборам алгоритмов, сервису, удобству работы в том или ином режиме. Например, если основные полиномиальные алгоритмы в САВ Mathematica высокозэффективны, то новый алгоритм, написанный исследователем, может работать в сто раз медленнее, чем когда он реализован на других САВ. Интерфейс с любым матобеслением в этой системе чрезвычайно прост, графика – великолепна (удобства для непрофессионала), но затруднено тестирование задачи и алгоритма, трассировка (важные в научных исследованиях). Некоторые САВ развивают абстрактные типы данных, средства для сложных конструкций (AХIOM, например), другие – в первую очередь, алгоритмические и научные пакеты (Maple, Reduce). MACSYMA не без труда выдерживает темпы конкуренции, но остается замечательным арсеналом алгоритмов, инженерных и научных пакетов программ. Derive специализировалась на группе карманных микроЭВМ и ПК, в том числе для учащихся. Универсальные САВ не сразу смогли заменить проблемно специализированные системы в таких областях, как моделирование в механике систем многих тел, небесной механике, физике, общей теории относительности и т.п. (см., например, W. Schiehlen [1990], W.H. Jefferys [1971], J. Calmet и J.A. van Hulzen [1983], В.П. Гердт, О.В. Тарасов, Д.В. Ширков [1980], С.А. Притоманов [1992], В.А. Брумберг, С.В. Тарасевич, Н.Н. Васильев [1989]). Специализированные САВ еще довольно долго успешно развивались и конкурировали с универсальными – благодаря эффективности, проблемной направленности по алгоритмам и сервису. Лучшие из них имеют десятки и сотни пользователей. Возможна и кооперация среди САВ обоих типов, когда специализированная САВ создается как ППП на базе универ-

сальной Постепенно так и происходит Так, САВ-компоненты системы для моделирования NEWEUL (W Schiehlen [1990]) была создана на базе Maple, САВ Пермского университета (М Ю Дроздов, В В Маланин [1984], А Б Бячков и др [1990]), Полимех-символ (В М Руденко [1987]) – на базе Reduce Заметим, что есть и "авторские" специализированные САВ или пакеты и алгоритмы, – с которыми работает только их автор – его личный "инструмент" При смене поколения машин он нередко воссоздается в качестве пакета в рамках другой, развитой САВ

2.4 Описание проблемно специализированных САВ

В задачах механики системы твердых тел использовался ряд проблемно-специализированных САВ и прикладных подсистем некоторых универсальных САВ Они выполняют вывод уравнений движения механической системы, их исследование, упрощение и анализ свойств, формирование численных программ для дальнейшего моделирования Определяющими для САВ этого типа является круг решаемых задач, совершенство и эффективность алгоритмов, специальный сервис, возможность решения особо громоздких задач Эти характеристики необходимо добавить при описании специализированных САВ в дополнение к описанию их подобно ППП Важно и четкое представление об особенностях методики исследования с помощью данной системы

На примере САВ для вывода уравнений движения удобно показать специфику описания свойств достаточно узкой группы проблемно специализированных САВ (М В Грошева, Г Б Ефимов [1988, 1993], Г Б Ефимов [1989] используя материалы рабочей группы и организованных с ее помощью совещаний и семинаров – Ленинград-88, Ленинград-89-II и более ранних) Таких САВ было создано более десяти, сведения о них собраны в таблице 3, они создавались пользователями под классы конкретных задач Общая схема их описания дополняется детальными сведениями об алгоритмическом оснащении и особенностях решаемых задач Поскольку эти задачи и алгоритмы близки, описание должно выявлять различия, показывать достоинства и особенности каждой САВ

Обенности исследуемых с их помощью задач включают возможное число степеней свободы, допустимость замкнутых контуров, связей, диссипативности, гидравлических, упругих, электромеханических и других компонент Вид получаемых уравнений и способы дальнейшего их исследования линеаризация, нормализация, устойчивость и т д Алгоритмы математические решение систем линейных и нелинейных уравнений, нахождение наибольшего общего делителя (НОД) и факторизация полиномов, раскрытие определителей Вычислительные удобства подсказчики, диагностики, редакторы, архивы формул, решений Численно-символьный интерфейс формирование фортрановых программ, их оптимизация, стыковка с ППП, САПР, графикой и т п Описание информационных характеристик этих САВ – как в общем случае (см выше) Описание САВ можно продолжить (по ЭВМ, программной среде и т п) Можно подробнее описать средства численного моделирования в описываемых системах – для исследования задачи после применения САВ Аналогично можно описывать и другие системы (без САВ) для автоматизации моделирования динамики сложных механических систем, достаточно многочисленные (см например, И И Карпов [1990])

Похожее описание свойств систем и программных комплексов для моделирования динамики систем многих тел приведено в книге W Schiehlen'a [1990], по материалам Семинара IUTAM (Мюнхен, 1977) и Симпозиума IUTAM/IFToMM (Удине, 1985) Оно включает особенности решаемых задач, методики исследования и программных характеристик систем Вместе объединены САВ и системы полностью численные, из общего числа 20 систем половина не имеет САВ-компоненты

(из первых десяти по числу пользователей пишь две являются САВ). Есть коммерческие системы, во главе с известной системой ADAMS, есть и "авторские", пока не распространяемые. Наблюдается разделение ролей – система ADAMS, например, почти не распространена в университетах. Почти все системы допускают замкнутые контуры и неголономности, В - упругие элементы. Все системы опробовались на двух тестах движении семизвездного плоского механизма с одной степенью свободы и манипулятора с пятью степенями свободы. Результат моделирования представлялся графически. Приложения весьма разнообразны транспорт, авиация и спутники, роботы и манипуляторы, машиностроение, движение человека и спорт. Описание включает топологию механической системы (замкнутые цепи, например), свойства элементов (упругие и т.п.), координаты (инерционные и т.п.), вид уравнений движения, тип вычислений и метод исследования, язык реализации, тип ЭВМ и т.п. (Г Б Ефимов [1989])

Таблица 3

Характеристики специализированных САВ для задач общей механики

Группы свойств САВ \ свойства	1 авгд	2 ежз	3 иклм	4 нопр	5 стуф	6 х	7 цщ	8 щ	9 fgh	10 lmn	11 pqr
1 Автоаналитик	++++	+++	+++	++	+	10	++	нод	+++	++	
2 Алгебра 05	++	+++	++	++				нод	+	++	++
3 АЛМАК	++	++	++	++	+++	+++	10	+	++	++	++
4 ВИБРАН	+	++	++	++	++	+		++	++	++	+
5 ДИНАМИКА	+	++		++++	+	+	+	++	+	++	++
6 КИДИМ	++	++	++	++	++	++	99	++	++	++	+
7 СПИН	+++	+++	+++	++	+	20	+++		+	+	+
8 Альфа/Vektra	+	+	++			+кинем	10	+++			
9 MMANG	+++	++	++	++		++	20	+++	++	++	++
10 MMT-I/V2	+	+	++	++	+	+	60		+	++	
11 SYMA	+++	++	++	+	+	++	15	+++		++	
12 - [Reduce]	++++	++	++++	++	++	++	+++	+++	++	++	++
13 - [Reduce]	++++		++	+	+	+	+++	+++	++	++	+

- Обозначения. 1.а -редактор, б -диалог, в -пакетн режим, г -диагностика д -архив, 2 е -числ счет, ж -САПР, ППП, з -генерация программ
 3 и -инстр к -публикации л -Фонд Алг и Программ м -использ в образовании
 4 н -упругие компон о -эл-мех компон п -гидравл р -замкн.контуры,
 5 с -уравн Лагранжа, т -Ньютона,Эйлера, у -вариационн ф -матричные,
 6 х -тако число степеней свободы
 7 ц -реш сист лин ур-ий, ч -сист нелин ур-ий ш -раскрытие определителя,
 8 щ -другие алгоритмы [НОД-наиб общий делитель, поиск стац реш]
 9 f -линеаризация, г -матричн алгоритмы, h -интегрир выраж
 10 l -осреднение m -исследов колебаний n -исслед динамич характеристик
 11 p -качество теория диффур, q -управление, r -устойчивость

У многих из САВ есть новые версии. По материалам 1986-88 г. Г Б Ефимов [1989]
 В таблице 3 описаны следующие САВ (название, город, организация, язык реализации, ЭВМ, объем САВ, литературу см по фамилиям авторов)

1 АВТО-АНАЛИТИК, Томск, ТГУ, Автокод, БЭСМ-6, 60 зон мл, Е А Арайс, Е А Арайс и Г В Сибиряков Есть ПК-версия (Рига, см Вильнюс-90) 2 АЛГЕБРА-05, Горький, ГГУ, Фортран, ЕС, 10 тыс фортран-операторов (ф/о), Г А Долгов, Д Н Макарычева, М А Чубаров Другие САВ - УСТОЙЧИВОСТЬ, АНФОР, Г А Долгов,

МА Чубаров З АЛМАК, Тула, Политехн инт, АНАЛИТИК, СМ-1410, Ю Б Подчуфаров, А П Матвеев 4 ВИБРАН, Вильнюс, ВИСИ, Фортран, ЕС-130К, СМ-28К, ПК, Р П Кульватене и Г П Кульватис 5 ДИНАМИКА Иркутск, Иркутск ВЦ СО АН, Алгол-ГДР, БЭСМ-6 35 зон мл, Л А Бурлакова, В В Голиков и др Таюк - MLR (Алгол-ГДР), МЕХАНИК (PL-1), ЕС, М В Почтаренко, А В Банчиков, Л А Бурлакова и др 6 КИДИМ, Харьков, Политехн Инст Алгол-68, ЕС, 1МБ, ПК, В Н Митин и Л И Штейновольф 7 СПИН, Ленинград, ЛИАП, Фортран, ЕС, 700К, Р И Сольницев и И В Ковтун 8 ANTRA-VEKTRA, Ленинград, ЛИТЛП, Фортран, ЕС, 120К, А Б Кикин и З Е Пейсах 9 MMANG, Гродно госун-т. Рефал, ЕС, 1МБ, О М Городецкий 10 ММТ-1/В2, Киев, Политехн инт, PL-1, ЕС, 350К, С Я Свиситунов и др 11 SYMA, Москва, НПО "Энергия", PL-1, ЕС 210тыс ф/о, А В Яценко, Ленинград-88 12 Подсистема-Reduce, Пермь, Пермск госун-т, Лисп-Reduce, ЕС, 350К, А Б Бячков В А Иванов и др , М Ю Дроздов и В В Маланин, ПК 13 Полимех-символ система на Reduce, Москва, ИПМех АН, Редьюс, ЕС и ПК, Д М Клинов и В М Руденко

В описание не вошли САВ Универсальный процессор Д Ю Погорелова (Инст инж железнодор трансп Брянск), КАПСУЛА М Г Зотова, М М Востострякова и П В Киргизбаева (Москва, МИЭМ), система АММУСТ В А Коноплева, численная с элементами САВ САВАГ (В П Червонных), ряд других систем и версий (По САВ в табл 3, а также не вошедшим в нее системам см Горький-84, Информатор-83, Ленинград-88,89, Вильнюс-84,90, Севастополь-91 и по фамилиям авторов)

Подробное обсуждение САВ для исследования динамики системы тел, про водившееся на семинарах Ленинград-88, Ленинград-89-II и конференции Вильнюс-90, показало полезность и дальнейшей дифференциации внутри этой группы – по сходным задачам и режимам работы Назовем три подгруппы с достаточно выраженной спецификой (Г Б Ефимов [1989], М В Грошева, Г Б Ефимов [1993]) Первая подгруппа (задачи типа "проектирования") имеет дело с большим числом не очень сложных вариантов-моделей, среди которых необходимо произвести выбор, оптимизацию параметров САВ используется в первую очередь при формализации модели для облегчения общения пользователя с системой (узкий участок в этой задаче) Это этапы 1,2,3 в цикле А А Самарского, остальные этапы выполняются численно Во второй подгруппе (моделирование в громоздких и сложных случаях, в символьном виде выполняются этапы 1-4) в центре внимания оказывается эффективность счета – выбор вида уравнений движения, оптимизация представления данных и их преобразований, организация счета, контроль точности, правильности программы и вычислений Третья подгруппа – качественные исследования свойств уравнений и решений нормализация, линеаризация, осреднение, выделение стационарных решений, исследование устойчивости САВ используется на многих этапах Удобство сервиса и эффективность вычислений важны, но не обязательны, главное – богатство и совершенство алгоритмов, в том числе специальных, их реализация и развитие Каждая группа имеет ярких представителей, имеются и промежуточные случаи

К первой группе относим КИДИМ, КАПСУЛА (в задачах управления), система СотрНЕР (З Э Боос, М Н Дубинин, В Ф Единерал и др , ИЯФ МГУ, также см Вильнюс-90) Последняя система для моделирования и оптимизации физического эксперимента очень ярко демонстрирует достоинства САВ при формализации задачи, поэтому мы включили ее вместе с механическими САВ Представителем второй группы является АММУСТ (с САВ САВАГ), MMANG, АНФОР К третьей группе относим иркутские МЕХАНИК и ДИНАМИКА, систему Полимех-символ Института проблем механики АН, на которой страбатывались механические алгоритмы (хотя элементы качественных исследований присутствуют во многих САВ)

Система УниверсальныйПроцессор Д Ю Погорелова первоначально можно было бы отнести к первой группе, но включающий ее современный комплекс программ соответствует группе второй. Приводим четко выраженных представителей указанных групп, другие САВ, как представляется, имеют промежуточный характер

Группы	I	II	III
	КАПСУЛА	АММУСТ	МЕХАНИК
	КИДИМ	АНФОР	ДИНАМИКА
	CompHEP	MMANG	Полимех-Символ

Диалог человека и САВ, поисковый режим работы используется в каждой подгруппе на ключевом этапе в первой – для формализации и формирования моделей, во втором – для оптимизации и контроля вычислений, в третьей подгруппе – на трудных этапах качественного исследования, например, при отыскании стационарных решений или при построении функции Ляпунова. Менее ответственные этапы используют стандартные методы, "вычислительный" режим работы САВ и стандартные пакеты, в том числе численные

Сравнивая предлагаемую схему классификации и описания свойств проблемно специализированных САВ с общей схемой, видим, что ее специальная часть сильно увеличена (за счет характеристики задач и механических алгоритмов). Такая схема дает более полноценное представление о свойствах специализированных САВ. Свои схемы могут быть предложены и для других распространенных типов САВ (для САВ учебного типа, для определенных алгоритмов и обладающих ими САВ, например, метода базиса Гребнера – см. Дубна-90, Вильнюс-90, Дубна-2001)

2.5 Сводка сведений о некоторых отечественных САВ

В прошедшие годы было разработано большое число систем аналитических вычислений, специализированных и универсальных. Был накоплен опыт разработки и эксплуатации систем. Решено много интересных и полезных прикладных задач. Ниже собраны краткие сведения об ряде отечественных САВ (на момент 1988 года, подробнее – М В Грошева [1988, 1992], где дана сводка возможностей и алгоритмов, типов решаемых задач). Для их описания был использован указанный выше набор характеристик. С тех пор произошла смена поколений ЭВМ и многое другое. Теперь все это – область истории, память о совершенных трудах, но также информация о специалистах в области САВ, о разработанных алгоритмах и их применениях в различных областях механики. Приводим список наиболее ряда известных САВ. В него не включены некоторые системы, описанные в предыдущем разделе, в табл. 3, по некоторым упомянутым САВ нет полных данных. Литературу по ним см. на фамилии авторов.

- АВТО-АНАЛИТИК - Томск, Е А Арайс, Б Ш Гельфман, В М Зюзьков, А В Шутенков, БЭСМ-6, машинные коды, язык Автоаналитик, IBM, PC, С,
- АНАЛИЗ Москва, Ю А Герасимов, А А Красилов, БЭСМ-6, Алгол-60
- АНАЛИТИК-74, -79 - Киев, В М Глушков, С Б Погребинский, В П Клименко, Ю С Фишман и др., МИР-2, язык Аналитик-74 СМ-1410.
- АНАЛИТИК-89,-91 - Киев, В П Клименко, С Б Погребинский, Ю С Фишман и др., программная реализация, язык АНАЛИТИК-89,91
- АНАЛИТИК-93,2000 - Киев, В П Клименко, А А Морозов, Ю С Фишман, А Л Ляхов и др., программная реализация с новыми языковыми возможностями
- АЛГЕБРА-0 5 - Горький, М А Чубаров, Г А Долгов и др., ЕС, Фортран
- АЛЬКОР - Москва, Л В Проворов, ЕС, БЭСМ-6, СМ-4, IBM PC, Рефал
- АРАП - Новосибирск, А Л Семенов, БЭСМ-6, ЯРМО, "Эльбрус" Автокод-Эльбрус

"Эльбрус", Автокод-Эльбрус
БОРА - Томск, Ю Б Шмидт, БЭСМ-6, машинные коды
ВИБРАН - Вильнюс, Р В Кульветене, Г П Кульветис, ЕС, СМ, ПЭВМ, Фортран
ВФЛ-1 - Иркутск, В М Матросов, С Н Васильев, В Г Карапаев, Е А Суменков,
БЭСМ-6, "Эльбрус", Паскаль
ДИНАМИКА Иркутск, В Д Иртегов, Л А Бурлаков, М В Почтаренко, БЭСМ-6, Алг-ГДР
ДИРАК - Новосибирск, А Г Грозин, "Одра", ЕС, "Электроника 100-25", Паскаль
КЕНТАВР - Минск, В Л Катков, М Д Попов, БЭСМ-6, ЯРМО
КИДИМ - Харьков, Л И Штейнвольф, В Н Митин, ЕС, Алгол-68
МАРС - Томск, Е А Арайс, В М Дмитриев, В Ф Шадрин, А В Шутенков и др.,
БЭСМ-6, ЕС, язык Автоаналитик, Фортран
МЕХАНИК Ирк ,А В Банщиков, Л А Бурлакова, Г Н Иванова, С Смирнов, ЕС, ПЛ-1
MLR - Иркутск, М В Почтаренко, БЭСМ-6, Алгол-ГДР
MMANG - Гродно, О М Городецкий, ЕС, Рефал
МОДЕЛЬ - Ташкент, В Бузурханов, М Музафаров, БЭСМ-6 Паскаль
НОРМАЛИЗАЦИЯ - Иркутск, В Д Иртегов, М А Новиков, БЭСМ-6, Алгол-ГДР
ПАС - Москва, Г Б Ефимов, БЭСМ-6, Фортран
ПЛ-ОСИАЛ - Ташкент, Т Т Имамов, Б Курманбаев, ЕС, ПЛ/1
ПЛЭНЕР-АНАЛИТИК - Москва, В А Эльтеков, БЭСМ-6, язык Плэнер
ПОЛИНАЛ - Москва, А Б Константинов, БЭСМ-6, Алгол-ГДР
САВАГ - Ленинград, Ю К Демьянович, БЭСМ-6, Алгол-ГДР
САНТ - Дмитровград, Ю В Марков, БЭСМ-6, Макро-ассемблер БЭМШ
САНТРА - Москва, И Б Щенков, ЕС, Рефал
СИРИУС-СПУТНИК - Харьков, И Р Аксельрод, Л Ф Белоус, ЕС, М-222, Спутник
СИРИУС-21 - Харьков, И Р Аксельрод, Л Ф Белоус, ЕС, Спутник, Рефал
СПРИНТ - Ленинград, Н Н Васильев, БЭСМ-6, Фортран
СТР - Ленинград, Н Н Васильев, БЭСМ-6, "Эльбрус", Фортран
СРМ - Москва, В Л Толунов, И Г Резников, В И Степланецкий, БЭСМ-6, ЕС, Рефал
УПП - Ленинград, В А Брумберг, С В Таrasевич, Т В Иванова, Н Н Васильев,
В И Скрипличенко, И О Бабаев, БЭСМ-6, ЕС, "Эльбрус", Фортран
САТА - Вильнюс, В В Тумасонис, БЭСМ-6, ЕС, Лисп
GRATOS - Ленинград, С В Таrasевич, БЭСМ-6, ЕС, "Эльбрус", Фортран
SASM - Ленинград, А В Кузьмин, БЭСМ-6, Фортран, Автокод Мадлен
SATURN - Москва, Д В Куликов, ЕС, Рефал
- Чебоксары, Б В Алексеев, БЭСМ-6, Фортран, машинные коды
- Ленинград, П И Бегун, Г А Водень и др., БЭСМ-6, Алгол-60, ЕС, Фортран
- Новосибирск, В Г Ганжа, С И Мазурик, В П Шапеев, БЭСМ-6, ЕС, Рефал
- Москва, Е В Панкратьев, Р Е Серов, С Г Хлебутин, СМ-4, Рефал
- Ташкент, Т Фархадов, Т Юлдашев, БЭСМ-6, Алгол-60
Устойчивость-1 - Горький, Г А Долгов, Д Н Макарычева, М А Чубаров, ЕС, Фортран

Глава3 САВ в задачах общей механики и теории управления

В настоящей главе собраны сведения о задачах механики, при решении которых были использованы системы аналитических вычислений. Рассмотрены отдельные задачи или группы задач, решавшиеся с помощью САВ и созданные для этого системы. Выделены некоторые алгоритмы и методы, реализованные в символьном виде. Разбиение материала по темам носит условный характер, сходные вопросы могут оказаться в разных разделах, часть материала уже освещена в предыдущих главах. Как и раньше, в основном описаны работы прежних лет в последнее десятилетие применение САВ стало обыкновенным инст-

рументом исследования, о котором часто не считают необходимым упоминать

Можно отметить типичные ситуации, когда системы аналитических вычислений успешно применяются. Во-первых, в тех случаях, когда имеют место однородные математические объекты, повторяемость однотипных операций и громоздкость выражений. Подобное имеет место в задачах небесной механики и общей теории относительности операции с длинными рядами и тензорами, подстановки ряда в ряд, отыскание решений в виде рядов. Другой случай - реализация с помощью САВ в символьном виде четко сформулированного алгоритма преобразований. Возможности, которые открывают перед исследователями САВ, стимулируют алгоритмизацию задач общей механики, механики сплошной среды и других областей исследования. В теоретической механике при выводе уравнений движения механической системы хорошо алгоритмизуется формализм Лагранжа, например, и соответствующие преобразования легко выполняют САВ. Еще один случай - формирование модели объекта и просмотр многочисленных ее вариантов. Это типичная задача, возникающая исследовании механических моделей и оптимизации их параметров при проектировании. Решение ее в символьном виде позволяет легче и быстрее исследовать характеристики механизма. Рассмотренные случаи привлечения САВ в исследовании являются типичными, но в конкретных задачах они чаще встречаются в комбинированном виде.

Информация о системах САВ и решенных с их помощью задачах механики накапливалась постепенно в Информационном банке Института механики МГУ, М.В. Грошевой. В работах М.В. Грошевой [1985, 1988], М.В. Грошевой, Г.Б. Ефимова [1988, 1993], М.В. Грошевой, Г.Б. Ефимова и В.А. Самсонова [1992] приводились сводки данных по возможностям САВ, прежде всего механического профиля, по их алгоритическому наполнению, типам и особенностям решаемых задач механики. Много материала содержится в тезисах и трудах конференций *Информатор-83, Горький-84, Вильнюс-84, -90, Дубна-80, -83, 85, 90, 2001, Ленинград 88, 89, Севастополь-91*. Обзоры по задачам разного рода упоминаются ниже и в соответствующих разделах.

Возможности САВ для задач общей механики были продемонстрированы в книге Д.М. Климов, В.М. Руденко [1989] и их обзорах. Ряд САВ и решаемые с их помощью задачи этого типа упомянуты выше, в разделе 2.4. В механике сплошных сред имелись обзоры А.А. Самарского, М.Ю. Шашкова [1984] для задач вычислительной математики, В.И. Савченко [1988] для механики твердого деформируемого тела. Вывод уравнений движения с помощью САВ освещен в обзорах М.В. Почтаренко [1985], И.Р. Белоусова [2002], в книгах Й. Виттенбурга [1980], М. Вукобратовича, обзоре W. Schiehlien [1990] и др. Задачи теории управления, решавшиеся с применением САВ, описаны у М.В. Грошевой и др [1998]. Многочисленные обзоры о применении САВ в различных задачах небесной механики упомянуты в разделе 3.7, также в книгах В.А. Брумберга. О задачах прикладной небесной механики (космодинамики) упомянуто в главе 4.

В статьях М.В. Грошевой [1988, 1992] были собраны данные о том, какие возможности имеются в каких системах. Приведены сводки алгоритмов математики и механики, реализованных в различных САВ, и, обратно, в каких системах имеются те или иные алгоритмы. Указано также, в каких САВ реализован ряд наиболее часто встречающиеся этапы моделирования и исследования механических систем: составление уравнений движения, методы исследования динамики сложных механических систем (критерии Сильвестра, Рауса-Ляпунова, нормализация уравнений, методы исследования устойчивости и др.), методы Цейпеля; Крылова-Боголюбова, групповые методы анализа и другие методы и алгоритмы.

3.1 Алгоритмы теоретической механики

Для применения САВ в задачах теоретической и прикладной механики характерно реализация в символьном виде таких операций, как составление функции кинетической энергии по геометрическому описанию системы, формирование сил в сложно организованных системах, составление уравнений движения, их преобразования, линеаризация, усреднение, декомпозиция и т п , выделение стационарных движений, исследование устойчивости движения, построение решения системы дифференциальных уравнений и т д . Обзоры приведены выше, о многих упоминаемых САВ сведения даны в разделах 2.3, 2.4, 2.5 главы 2

Набор используемых алгоритмов механики, степень сложности входных и промежуточных аналитических выражений можно представить на примере работы пакетов программ сотрудников Иркутского ВЦ СО РАН (работы Л А Бурлаковой, В Д Иртегова, М В Почтаренко, А В Банщикова и др) Авторы имели в виду качественное исследование движения механических систем с помощью первых интегралов Поэтому для вывода дифференциальных уравнений движения использован лагранжев формализм, для случая голономных систем без избыточных координат Для сил принято разбиение на потенциальные силы, определяемые силовой функцией, и диссипативные силы, характеризуемые диссипативной функцией (функция Релея или обобщенная) Допустимый класс систем состоит из n тел, связанных друг с другом сферическими, цилиндрическими, призматическими шарнирами, система кинематически разомкнута, голономна Кинетическая энергия системы подсчитывается стандартно Задаются векторы абсолютных скоростей точек крепления, матрицы связи систем координат отдельных тел, кинетическая энергия тел и силовая функция Алгоритм их формирования хорошо формализован и свободно выполняется в символьном виде Силовая функция в случае центрального ньютоновского поля может быть представлена с необходимой точностью в виде разложения по степеням отношений характерных размеров тел к расстоянию от точек крепления до центра притяжения

Один из примеров дальнейшего использования построенной системы дифференциальных уравнений – это выделение "простейших" движений Для консервативных механических систем реализовано получение интеграла энергии и циклических интегралов Если система дифференциальных уравнений допускает $m + 1$ первых интегралов V , то стационарным движениям по Раусу отвечают значения координат которые доставляют экстремум некоторой функции K , являющейся линейной связкой этих интегралов Проведено исследование для двух типов первых интегралов - циклических и квадратичных по фазовым переменным Для консервативной механической системы с m циклическими координатами уравнения стационарных движений принимают простой вид, откуда выделяются стационарные движения При наличии квадратичных интегралов условия для нахождения стационарных движений представляют собой линейную алгебраическую систему которая решается известными методами алгебры

Достаточные условия устойчивости выделенных стационарных движений получаются по теореме Рауса-Ляпунова как условия знака определенности квадратичной формы – второй вариации интеграла K в окрестности исследуемого движения при постоянных значениях интегралов V Для получения достаточных условий используется модифицированный критерий Сильвестра Программа, поиска первых интегралов – выявляет их все исследованием производных от лагранжиана по обобщенным координатам При обращении одной из них в нуль, соответствующий интеграл выводится на печать Найденные интегралы позволяют составить систему уравнений для определения стационарных движений.

В качестве примеров были рассмотрены гироскоп в кардановом подвесе и некоторые другие технические устройства. Заметим, что для составления характеристического уравнения пневматизированной системы дифференциальных уравнений нет необходимости разрешать их относительно старших производных. Эти алгоритмы были реализованы в пакете ДИНАМИКА (М В. Почтаренко). Реализация САВ на языке Алгол-ГДР с вычислительной ориентацией обеспечивало естественный переход к численному счету. В символьной mode пакета имелся развитый аппарат векторно-матричной алгебры.

Затем был создан пакет МЕХАНИК (см А В Банщиков и др.), в котором в дополнение к возможностям предыдущего пакета был увеличен набор алгоритмов, повышена их эффективность и увеличена допустимая размерность. Большая по сравнению с БЭСМ-6 память ЕС ЭВМ позволила расширить класс изучаемых объектов, включать в рассмотрение механические системы как с абсолютно твердыми, так и с деформируемыми компонентами, наряду с уравнениями движения Лагранжа II рода формировать уравнения Эйлера-Лагранжа.

При моделировании деформируемых элементов принято, что в каждой точке тела смещение от недеформированного состояния может быть представлено вектором от обобщенных координат деформации и собственных форм колебаний или их функций. Учет деформации существенно усложняет вид кинетической энергии и силовой функции, повышает размерность исследуемой системы, однako для получения уравнений движения формализм Лагранжа работоспособен.

На практике часто используют уравнения Эйлера-Лагранжа, которые во многих случаях компактнее уравнений Лагранжа II рода вывод их также достаточно алгоритичен. При этом кинетическая энергия описывается в квазискоростях, которые выражаются через обобщенные скорости. Правые части этих соотношений можно считать однородными линейными формами. При разработке алгоритмов обращения матриц учитывается ее блочная структура, имеющая место при стандартном выборе квазискоростей. Размерность каждого блока не более 4, что позволяет работать с матрицами достаточно высокой размерности. Для повышения ее и эффективности вычислений использовалась декомпозиция системы. Одна из последних версий пакета допускала

- моделирование неголономных систем с помощью уравнений Эйлера-Лагранжа (в квазискоростях) с исключением реакций связей или уравнений Чаплыгина,

- построение для полученных дифференциальных уравнений движения в квазискоростях, инвариантных соотношений специального вида, из которых можно получать условия существования первых интегралов либо строить связи с целью получения функций Ляпунова с известной структурой производных,

- построение функций Ляпунова для исследования стационарных движений системы, когда нелинейные дифференциальные уравнения раскладываются в ряд в окрестности стационарного движения с удержанием членов нужного порядка малости по отклонениям от невозмущенного движения.

Предложены алгоритмы получения дифференциальных соотношений, из которых могут быть сформированы функции Ляпунова для анализа устойчивости или неустойчивости невозмущенного движения. В окрестности стационарных движений в пакете можно решить задачу о синтезе управления по заданной степени устойчивости, построить матрицу управляемости с проверкой критерия Капмана. Пакет продолжал развиваться уже на базе САВ Mathematica (А В. Банщиков, Л А. Бурлакова и В Д Иртегов [1989, 1998]). Используя его, Т Н Титоренко [2002] подготовила компьютерный задачник по методам качественного исследования динамики сложных механических систем и применению САВ.

Несколько иная последовательность исследования механических систем за-

ложена в САВ MMANG (О М Городецкий [1984] и др.). В ней реализованы следующие алгоритмы: формирование функции Лагранжа и обобщенных сил по геометрическим характеристикам системы, составление уравнений Лагранжа для механических систем со структурой "дерева", линеаризация уравнений в окрестности стационарных решений, исследование на асимптотическую устойчивость стационарных решений по методу Гурвица, построение приближенного решения дифференциальных уравнений в виде отрезков степенных рядов, осреднение уравнений, асимптотическое разделение "быстрых" и "медленных" движений для определенного типа систем. САВ позволяет пользователю активно вмешиваться в процесс решения задачи на любом этапе работы программы. В системе заложена арифметика чисел произвольной контролируемой точности. Пакет использовался для моделирования и анализа высокоточных гироскопических устройств.

З Е Филлер и его ученики (В В Карабчевский, З Е Филлер [1984]) создали комплекс программ для численно-символьного исследования ВИБРОТЕХНИКА (ЕС ЭВМ, языки Фортран, Ассемблер), предназначенный для анализа динамики электромеханических систем, вибромашин, устройств шахтного оборудования. С его помощью можно получать в символьном виде уравнения движения в форме Лагранжа, преобразовывать их к удобному для дальнейшего исследования виду, например для численного счета. Система может проводить дифференцирование в символьном виде любых сложных функций, формировать матрицу Якоби, используется при выводе критериев устойчивости систем большой размерности.

Система аналитических вычислений ВИБРАН, разработанная в Вильнюсском инженерно-строительном институте Р В Кульветене и Г П Кульветисом, по некоторым возможностям приближалась к универсальным системам. С ее помощью решен ряд практических задач, как ясно из названий работ. Программы системы можно разделить на четыре группы: составление уравнений движения на основе уравнений Лагранжа I и II рода, решение систем дифференциальных уравнений методами малого параметра и гармонического баланса, получение условий устойчивости периодических решений, вспомогательные математические операции - разложение в степенной ряд нелинейных функций нескольких переменных, генирирование квадратичных форм, работа с разреженными матрицами и др.

В Институте механики МГУ для решения ряда прикладных задач использовалась специализированная САВ ПАС, разработанная в ИПМ им М В Келдыша (Информатор-83). С ее помощью формировалась кинетическая энергия по кинематическим параметрам и строились уравнения Лагранжа многозвенной шагающей механической системы (Г Б Ефимов, Н С Коникова [1977]). Построение в символьном виде уравнений движения механической системы и их исследование присутствует в рассмотренных выше задачах и в ряде работ, которые будут упомянуты ниже (также в разд. 2.4). На некоторых из них остановимся подробнее.

САВ используются в современных исследованиях по аналитической механике поиску симметрий по Э Нёттер, интегрируемости (Д А Абраров [2000]), А С Купешов [2002], развил классическую задачу о качении тела по шероховатой поверхности, исследованную С А Чаплыгиным, П Аппелем и Х М Муштари. Использовался эксперимент с помощью САВ Maple и алгоритм Дж. Ковалчича интегрирования дифференциального уравнения, причем были даны рекомендации разработчикам Maple позволяющие применять этот алгоритм в новых случаях. Удалось получить новые случаи интегрируемости и явный вид первых интегралов.

3.2 Исследование линеаризованных уравнений

Вопросы и алгоритмы исследования устойчивости, в связи с их громоздкостью являются основными при решении многих задач с использованием САВ. Часто

пакеты программ, ориентированные на изучение механических объектов и опирающиеся на САВ, включают в себя исследование линейного приближения динамических систем (см раздел 2.4 и табл 3).

Например, в упомянутых выше пакетах ДИНАМИКА И МЕХАНИК (А В Банщиков, Л А.Бурлакова, В Д Иртегов, М В Почтаренко и др) линеаризованные уравнения движения выводятся путем разложения характеристической функции (лагранжиана) в окрестности заданного движения до второго порядка малости и последующего составления уравнений Лагранжа. Возможно получение дифференциальных уравнений первого приближения непосредственно из полных уравнений Лагранжа. Необходимые условия устойчивости выделенных стационарных движений записываются и анализируются с помощью критерия Рауса-Гурвица.

Весьма глубоко методы линейной алгебры (в их адаптации для САВ) были продвинуты в работах сотрудников НИИ прикладной математики и кибернетики Горьковского университета (А С Алексеева, М А Чубаров, Г А Долгов и др). Была разработана система АЛГЕБРА-0, для выполнение аналитических операций над алгебраическими многочленами, отрезками степенных рядов Тейлора и Лорана (18 операций), полиномиальными матрицами (21 операция). Возможна вычислять детерминанты полиномиальных матриц (согласно комбинаторному определению и видоизмененному методу Гаусса), решать системы линейных алгебровических уравнений с полиномиальными коэффициентами, находить обратную матрицу и т п (Г.А.Долгов, Д Н Макарычева и М А.Чубаров [1982]). На основе этой системы был реализован ряд алгоритмов исследования устойчивости линеаризованных моделей и качества переходных процессов в них – пакет УСТОЙЧИВОСТЬ, который обеспечивал пользователю удобные формы работы.

Позже была создана система МАУС (Моделирование и Анализ Устойчивости), включившая в себя предыдущие и новые алгоритмы, повышение их эффективности, арифметику чисел высокой точности, более совершенные средства общения пользователя с пакетом (М А Чубаров, Г А Долгов и др [1988]).

Пакет программ позволяет в символьном виде решать следующие задачи

- разбиение пространства параметров линеаризованной модели на области, в которых характеристическое уравнение имеет одинаковое число корней в правой полуплоскости (D-разбиение),

- вычисление экстремальных точек области устойчивости,

- разбиение пространства параметров на области с одинаковым числом вещественных, положительных или отрицательных корней,

- решение этих задач относительно единичного круга (проблема Шура-Кона),

- расчет областей с одинаковым запасом устойчивости,

- расчет амплитудно-частотных характеристик линеаризованной модели

В последних версиях пакета была предусмотрена возможность исследования абсолютной устойчивости управляемых динамических систем, содержащих скалярную нелинейность, т. е. сведение задачи проверки выполнения частотных условий в особых случаях к проверке свойства неотрицательности полиномов. Проведено уточнение и обобщение с помощью теории последовательности полиномиальных остатков (ППО) критериев неотрицательности для полиномов, зависящих от параметров. Даже при линейном вхождении параметров в коэффициенты системы дифференциальных уравнений характеристический полином ее линейной части и частотные условия зависят от этих параметров, как правило, нелинейно. Это существенно усложняет задачу определения областей абсолютной устойчивости являющихся пересечением в пространстве параметров областей гурвицевости полинома $P(s)$ и областей, где выполняются частотные условия. Обычно необходимые и достаточные условия неотрицательности полинома со-

дятся к выяснению отсутствия у него положительных корней нечетной кратности

С целью получения критериев неотрицательности, не связанных с вычислением корней полинома, число его положительных кратных корней выражены через индексы Коши и коэффициенты элементов обобщенных ППО специального вида Реализован разработанный авторами символьный алгоритм формирования условий абсолютной устойчивости для нелинейных систем и особых случаев Он как правило, имеет преимущества перед другими алгоритмами, в том числе по быстродействию – за счет того, что алгоритм ППО хорошо согласуются со спецификой САВ (М А Чубаров [1974, 1988], А С Алексеев, М А Чубаров и др [1978]) Система использовалась при исследовании многих конкретных объектов см Н В Иванова, Д Н Макарычева и др [1978], В И Горюнов, Г А Долгов, Н И Лобашов [1984], Я К Любимцев, В С Метрикин [1984], А Л Кулаков, М А Пейсель [1984] и др

В Иркутском ВЦ СО АН СССР для анализа динамических свойств и устойчивости сложных систем использованы векторные функции Ляпунова. Теория метода основана на "теоремах сравнения" и "теоремах о динамических свойствах" Реализован метод в виде пакета ВФЛ-1 (В М Матросов, С Н Васильев и др.) и ориентирован на решение задач динамики и теории управления (см также в З 6)

3.3 Нелинейные системы

Некоторые из нелинейных методов механики были реализованы в САВ достаточно давно в Киеве на языке АНАЛИТИК успешно использовали методы осределения в задачах механики, а также физики и радиофизики – Ю В Благовещенский, Ю С Фишман [1970], Ю А Митропольский, А А Молчанов [1981] Введением в ряд методов механики и их реализацию с помощью САВ, как и в использование Reduce для их решения может служить книга Д М Климова и В М Руденко [1989].

Один из наиболее ответственных и трудных этапов решения механической задачи - этап ее постановки Выбор кинематической схемы и модели для силовых воздействий - не формализованные процедуры Они требуют от исследователя не только интуиции, но и использования самых различных математических приемов Для решения возникающих при этом вопросов необходимы САВ с широкими возможностями, универсальные и гибкие, желательно с возможностью диалогового режима работы Описание взаимодействий в механической системе может требовать как решения промежуточных физических задач, так и последующего нелинейного преобразования этих решений к другой форме При изучении гироскопических систем сложной конструкции удается перенести на ЭВМ еще один этап решения, а именно - формирование аналитических выражений для действующих в системе сил и моментов

В качестве примера приведем задачу исследования движения ротора криогенного гироскопа, удерживаемого в магнитном поле двух круговых сверхпроводящих витков (В Ф Журавлев и В М Руденко [1983], Д М Климов, В М Руденко и др [1985], Д М Климов, В В Леонов, В М Руденко [1984]) Форма сверхпроводящего ротора близка к сферической Положения ротора задаются координатами центра масс и углами Эйлера-Крылова поворота вокруг центра масс Силы и моменты, действующие на ротор, для каждого его положения определяются из уравнений электродинамики с граничным условием - равенством нулю нормальной составляющей магнитной индукции на поверхности сверхпроводника При решении сделаны упрощающие допущения - задача магнитостатики решается при условии малости скорости движения ротора в сравнении со скоростью света и зазора по сравнению с радиусом ротора, т е ищется асимптотическое решение уравнений

Движение центра масс ротора определяется малой несферичностью его фор-

мы Для построения уравнений движения ротора необходимо решать нелинейную систему уравнений; решение ищется методом последовательных приближений (в переменных, определенных в системе координат, связанных с главными осями инерции ротора), с любой заданной точностью по степеням малого параметра Правые части уравнений движения получаются на следующем шаге – интегрированием уравнений для сил и моментов с учетом найденных выражений для координат Далее применяется метод осреднения Учет несовпадения центра масс и центра сферы, дает конечные выражения для среднего значения уводящего момента Аналитические преобразования проводились на САВ Reduce

В пакете Полимех-символ, созданном на базе Reduce (В М Руденко), были реализованы достаточно общие асимптотические алгоритмы, которые позволяют исследовать нелинейные динамические системы (В Ф Журавлев [1983], Д М Клинов и В М Руденко [1989], В В Леонов [1984]) С его помощью А Ф Брагазин, В В Леонов, В М Руденко и И П Шмыглевский [1992] проводили предварительный анализ уравнений движения низколетящего ИСЗ, подверженного действию различных возмущающих факторов – зональных гармоник поля тяготения Земли, сопротивления атмосферы и др Проводилось формирование уравнений движения ИСЗ, их осреднение (с помощью модифицированного алгоритма) до четвертого порядка по малому параметру, что возможно лишь с применением САВ Затем генерировались фортран-программы для расчета траектории ИСЗ и прогноза его движения с высокой степенью точности

М В Грошева, В А Привалов и В А Самсонов [1984] с помощью САВ ПАС, а затем Reduce исследовали поведения тела сложной конфигурации в потоке среди формирование сил и моментов, действующих на систему, анализ стационарных режимов движения, в аналитическом виде получены угловые скорости собственного вращения и прецессии тела Рассматривалась задача определения угловой скорости авторотации и момента Магнуса, одной из наименее изученных характеристик аэродинамического взаимодействия тела с потоком Для тел "гладких" форм подобные эффекты связаны с вязкостью воздуха Для тел сложной конфигурации значителен вклад скоростного напора, влияние которого и исследовалось Используются такие модели взаимодействия потока и пластины, при которых оно сводится к одной равнодействующей силе, приложенной к пластине

Рассматривались три различные математические модели локального взаимодействия потока и лопасти, в частности, модель так называемого ударного взаимодействия, когда принимается, что действующая на пластину сила направлена по нормали к ее плоскости, зависит лишь от нормальной составляющей скорости центра давления пластины относительно потока При расчете силового воздействия потока на тело сложной конфигурации, содержащее несколько взаимодействующих с телом пластин, различным образом ориентированных по отношению к потоку, возникают громоздкие выражения, обусловленные многократным преобразованием координат Этот этап работы был осуществлен с помощью САВ Получено несколько компактных и вполне обозримых формул, которые можно использовать для определения характеристик авторотирующих тел

Н М Глазунов [1987] исследовал с помощью Reduce медленное движение (скорость << скорости света) конечного числа точечных одноименно заряженных свободных электрических зарядов в магнитном поле идеально электропроводящего кольца, а также вопросы управления этим движением Разработаны программы на Reduce (в цилиндрической системе координат) для вычисление электрических сил, действующих на заряд, возмущенного движением, линейного приближения, магнитного потока через плоскость кольца от i-го заряда при заданном

потенциале магнитного поля заряда, силы Лоренца, действующей на иной заряд, вывод уравнений движения, исследование устойчивости и управляемости линейного приближения Проведено исследование некоторых частных конфигураций

Задачи исследования вероятностных процессов в нелинейных динамических системах (важные и трудные как теоретически, так и в практическом плане) исследуются методами САВ в Пермском университете в течение многих лет (В В Маланин, В И Лумпов, М Ю Дроздов, В М Мирков, И Е Полосков) Одним из методов их изучения являются уравнения Фоккера-Планка-Колмогорова (ФПК) для плотности вероятности распределения фазового вектора динамической системы Громоздкость ФПК-уравнений приводит к ряду трудностей при реализации – в том числе при применении САВ Использование САВ связано с выводом и преобразованием уравнений, с построением решений в аналитическом виде, при генерировании численных программ, при использовании арифметик высокой точности. САВ Reduce, Mathematica и другие использовались для исследования нелинейных стохастических и управляемых процессов (систем со случайным входом, уравнений Ляпунова и Беллмана), для анализа поведения упругой колонны под действием случайной осевой нагрузки с применением метода Галеркина и в целом ряде других задач (В В Маланин и др [2001], И Е Полосков [2004] и др)

Пакеты по методам и алгоритмам нормализации дифференциальных уравнений (для исследования устойчивости и т п) создавались А П Маркеевым [1970] и А Г Сокольским [1975,1981] и др в ИПМ им М В Келдыша, ИТА РАН и МАИ, С В Медведевым в МАИ [1984], М А Новиковым и В Д Иртеговым [1984] в Иркутском ВЦ СО РАН, В Ф Журавлевым и В М Руденко [1983] в ИПМех РАН, В Ф Единералом [1985] и А Д Брюно [1998] в НИЯФ МГУ и ИПМ им М В Келдыша РАН

3.4 Задачи теории оптимального управления

Задачи теории управления, особенно в случае большого числа степеней свободы, большой размерности имеют немало громоздких вычислений, где полезно применение САВ Обзор ряда задач дан М В Грошевой и др [1998] Некоторые задачи оптимального управления в космодинамике освещены в главе 4

Для одной из типовых задач оптимального управления – при выводе уравнений для сопряженных переменных управляемой системы и их преобразовании при замене координат, опираясь на свойства гамильтоновости системы уравнений согласно принципу максимума Понтрягина, – использование САВ обсуждается в работе Д.М Климова, Г Б Ефимова и др [1985] При исследовании устойчивости управляемого движения, его коррекции или для вычисления матрицы производных при решении краевой задачи полезны уравнения в вариациях для системы уравнений оптимального движения Пример получение формул для преобразования уравнений оптимального движения точки с малой тягой в центральном поле – от прямоугольных к цилиндрическим координатам и обратно, а также уравнений в вариациях в цилиндрических координатах для решения двухточечной краевой задачи с помощью САВ ПАС Полученные в символьном виде правые части уравнений генерированы в виде фортран-операторов и использованы для численного расчета (Г Б Ефимов, М В Грошева, А Т Абдрахманов [1984])

САВ успешно применяются в настоящее время при выводе уравнений оптимального движения в достаточно сложных системах – как привычный инструмент, часто без специального упоминания об их использовании М С Константинов и др [2001] использовали MathCAD (САВ, входящая в него) при выводе уравнений оптимального движения в сложных случаях Причем, во взаимодействии использовались графические, символьные и численные возможности При решении краевой задачи, к которой сводится решение многих задач оптимального управ-

ления, новые возможности в смысле улучшения сходимости представляет метод "продолжения по параметру". Для его применения необходимо строить громоздкие вспомогательные системы уравнений, в чем весьма эффективным может быть использование САВ – например, система Maple В Г Петуховым [2004]

САВ успешно работают в задачах синтеза управления В А Соболевым [1987] рассматрена задача декомпозиции системы дифференциальных уравнений с несколькими малыми параметрами при производных. Строится замена переменных, приводящая исходную систему уравнений к "блочно-треугольному виду". Предлагаемое авторами расщепляющее преобразование эффективно строится в виде асимптотических разложений по степеням малых параметров. С вычислительной точки зрения оказывается достаточным алгебраических операций и дифференцирования, которые легко выполняются с помощью САВ. Рассмотрена задачу о построении оптимального управления для линейной сингулярно возмущенной системы с квадратичным функционалом качества. Решение сводится к нахождению положительно определенного решения сингулярно возмущенного матричного дифференциального уравнения Риккати. Эта процедура реализована на ЭВМ в виде универсального комплекса программ на языке Reduce.

Одним из важных этапов проектирования систем управления является синтез алгоритмов обработки информации для проектируемой системы управления. Сочетание традиционных численных методов с символьными аналитическими преобразованиями на ЭВМ расширяет класс решаемых задач.

В Л Кистлеров и А П Серебровский [1986] и др. рассматривали случай, когда состояние объекта управления описывается некоторой детерминированной или стохастической системой линейных по фазовым координатам и управлению разностных уравнений. Качество управления характеризуется квадратичным функционалом потерь. Коэффициенты уравнений и функционала потерь являются функциями одного или нескольких скалярных постоянных или медленно меняющихся во времени параметров. Например, коэффициенты математической модели движения водометного судна, при синтезе системы управления курсом или движением по заданной траектории, являются функциями скорости движения судна относительно воды. В таких случаях закон управления является линейным по значениям (или по оценкам - при стохастической модели объекта) отклонений текущих фазовых координат от заданных. Коэффициенты в законе управления определяются при решении соответствующего дискретного уравнения Риккати и являются функциями параметров, входящих в математическую модель.

САВ позволяет получить аналитические выражения, аппроксимирующие решение уравнения Риккати на заданных интервалах изменения параметров, и определить коэффициенты закона управления как функции этих параметров. Это особенно важно, когда нельзя пренебречь качеством управления переходным процессом в управляемой системе по сравнению с установленвшимся. Аналитические преобразования проводились, используя язык FLAC (В.Л Кистлеров [1987]).

Синтез законов управления в ряде задач теории автоматического управления сводится к проблеме конструирования правых обратных систем (Ю Котта [1986]). Алгоритм их построения для нелинейной системы с дискретным временем реализован Ю Котта и Р Роомельди [1990] в виде рекуррентной процедуры, состоящей из алгебраических операций и дифференцирования, как пакет на Reduce. Программы тестировались на задаче управления манипулятором и других.

На примере синтеза оптимального управления в одной задаче математической физики (линейная стабилизация температурного поля в тонкой круглой пластинке) показано как использование САВ Reduce позволяет повысить точность

решения краевой задачи методом штрафных функций (М Г Дмитриев [1990])

Задачи управления в условиях случайных помех и других вероятностных факторов исследовались методом ФПК-уравнений В В Маланиным [1995,2001], в И Лумповым [1982] И Е Полосковым [2004] и другими в Пермском университете

3.5 Управление роботами и другими техническими объектами

В задачах управления роботами для вывода уравнений движения нередко применяются САВ (см выше и обзоры М В Почтаренко, И Р Белоусова, книгу Й Виттенбурга [1980] и др) Сопоставление пакетов программ дело ответственное и неоднозначное (напр., W Schiehlen [1990]) Оценка роли и характера САВ, используемых в пакете, зависит от типа задач, сложности объектов, на которые он ориентирован Сравнения различных методов построения уравнений в символьном виде, их реализации и эффективности проводились на Всесоюзных семинарах в Санкт-Петербурге в 1988-1989 годах (*Ленинград-88, Ленинград-89 I*) Часто при описании применения САВ задачи управления специально не выделяются, поскольку ее специфика приходится на численную компоненту программного комплекса Нередко при описании формирования закона управления или уравнений движения объекта вообще не говорится об использовании САВ

Для формирования управляемых сил, обеспечивающих плавность движения звеньев роботов-манипуляторов, необходимо вести расчет действующих в системе сил и моментов согласно дифференциальным уравнениям движения, причем достаточно быстро во избежание резонансных явлений Кроме того, для управления роботами применяются микроЭВМ, что ограничивает возможность использования численных методов Анализ и сравнение методов автоматизированного вывода уравнений движения в различной форме и их использования для задач робототехники (с помощью САВ или без них) дан И Р Белоусовым [2003]

В работах Р А Сабитова [1977], А С Землякова, Р А Сабитова и др [1977], выполненных в 70-е годы, решалась задача построения управления программным движением систем при заданных ограничениях на фазовые векторы объекта и исполнительных органов Предлагался цикл исследования и построения управления манипулятором Разработаны методы синтеза управления программным движением, построения упрощенной управляемой функции, обеспечивающей требуемые показатели качества регулирования с учетом ограничения на фазовые переменные, проверки условий совместности задаваемого программного движения с уравнениями движения объекта и ограничениями до и после построения управляемой функции Предложенные алгоритмы реализованы в виде пакета программ на ЕС ЭВМ, язык PL/1 Этап анализа задачи завершается автоматическим формированием программ численного счета для конкретной управляемой мини-ЭВМ, расположенной в цепи обратной связи манипулятора Этот этап является новым, дополнительным в вычислительном цикле (см гл 2, 2.1)

Г П Кульветис [1988] на универсальной САВ *tiMath* провел анализ алгоритмов вывода уравнений движения роботов-манипуляторов, управляемых в реальном времени Алгоритмы Паула-Валкера (формализм Ньютона-Эйлера) и Ватерса-Холербаха (формализм Лагранжа) оказались непригодными – на *tiMath* не хватило ресурсов ПС по времени и памяти Прямой алгоритм Уиккера-Кона, использующий формализм Лагранжа, был реализован на САВ ВИБРАН и дал хорошие результаты ВИБРАН (Г П Кульветис [1983]), использовавшийся при решении многих задач, и в этом случае имел преимущества перед *tiMath* С помощью символьно-численного интерфейса для полученных в символьном виде уравнений движения генерируется фортран-программа расчета управлений, удовлетворяющих требованиям управления роботом-манипулятором в реальном

времени Работа комплекса программ проверена при испытаниях робота "Джильберто" с шестью степенями свободы (Миланский политехнический институт)

Одним из подходов к решению проблемы выбора конкретных структур и расчету параметров систем управления приводами манипуляторов, которые обеспечивают требуемую точность движения схватка робота по заданным траекториям и при этом имеют максимально простую реализацию, является создание экспертных систем (В Ф Филаретов, Ф И Корзун, П И Мимоход [1990]) В свою очередь эффективность их работы определяется эффективностью алгоритмов создания и исследования математических моделей манипуляторов на САВ Отмечено, что универсальные САВ (Reduce, MACSYMA и др.) во многом избыточны и малозэффективны для задач проектирования и исследования манипуляторов Авторы разработали специальный способ кодирования и обработки символьной информации, эффективный применительно к уравнениям динамики манипуляторов Об экспертных системах см также В Маланин, В Микрюков и др [1993]

Л Д Акуленко, Л К Лилов, М Е Лорер, С А Михайлов [1989] рассмотрели вопросы планирования и оптимизации ориентационных движений кисти манипуляционного робота антропоморфного типа Предполагалось, что схват трехзвенной кисти нагружен протяженным объектом с заданными массо-инерционными характеристиками Исследована зависимость ориентационных движений кисти от геометрических, инерционных и электромеханических параметров системы Традиционные аналитические и числовые методы анализа и построения управлений использовали динамические уравнения системы полученные в символьном виде с помощью Reduce Для объектов подобного типа исследования по динамике, управлению и оптимизации режимов ориентации немногочисленны

Б А Бордюг [1989] рассмотрел вопросы использования методов компьютерной алгебры (САВ) при построении математических моделей шагающих аппаратов, управляемой механической системы с переменными связями, которая может содержать замкнутые кинематические цепи Приведен алгоритм составления дифференциальных и конечно-разностных уравнений, описывающих движение шагающего аппарата при неизменных связях и процесс смены связей (опорных ног), соответственно Построена математическая модель четырехногого шагающего аппарата (ноги весомые) с помощью специализированной САВ MMANG (О М Гродецкий [1984]) Анализ динамики движения проводился численно

Вопросы компьютерного конструирования моделей сложных механизмов и машин, представляющих совокупности физически неоднородных подсистем (механических, гидравлических, управляющих, информационных), рассмотрены Е А Арайсом, В М Дмитриевым [1982], В М Дмитриевым, А В Шутенковым [1989] Предложенный формализм и методика основаны на представлении механической системы в форме компонентной цели Построение моделей отдельных компонент в числовой и аналитической форме и примеры настройки на конкретные режимы оформлены в виде самостоятельных универсальных вычислительных блоков Программы собраны в виде пакета МАРС, использующего универсальную САВ АВТОАНАЛИТИК, языки Ассемблер и Фортран Исследовались динамические характеристики роботов-манипуляторов, статические и динамические характеристики большегрузных экскаваторов, управляемых механических объектов

Система автоматизированного моделирования адаптивных роботов (AP) МАРС-AP, предназначенная для исследования и обоснования выбора проектных параметров подсистем AP (исполнительного механизма, системы управления, системы чувствования), условий окружающей среды, проверки стратегий управления и чувствования была создана В М Дмитриевым и Т Н Зайченко [1991]

Исследование динамики и управления колесными роботами в течение многих лет ведется в НИИ Механики МГУ совместно с ИПМ им М В Келдыша, Московским Энергетическим институтом (Е А Девягин, А.И Кобрин, Ю Г Мартыненко, и др., также Тула-2005). В сборниках Научно-методических статей "Теоретическая механика" и "Мобильные роботы и мехатронные системы" Международных научно-технических фестивалей молодежи имени проф. Е.И Девягина (М., МГУ), проводившихся под руководством его и академика Д.Е Охочимского, рассмотрены многие задачи движения роботов, а также информации и управления – как с использованием САВ, так и иными способами (И Р Белоусов [2002])

В работах Ю Г Мартыненко [2002] исследовались уравнения движения колесного трех и четырехколесного робота, исследование которых проще, чем одноколесных и двухколесных из-за статической неустойчивости последних. Для этой неголономной системы предложены уравнения движения Лагранжа с неопределенными множителями, при различном способе исключения которых получаются уравнения движения робота в форме уравнений Воронца, Чаплыгина или Аппеля. Громоздкость указанных уравнений для случая робота делает удобным применение матрично-векторной формы и использование САВ.

Процесс создания систем автоматического управления (САУ) характеризуется большим удельным весом динамических задач при выборе структуры, параметров и алгоритмов управления. Каждая из этих задач требует для своего решения одного или нескольких математических описаний (МО) функционирования САУ и его элементов. Разработка систем автоматизированного проектирования (САПР) САУ сопряжена с комплексной автоматизацией всех составляющих технологии проектирования САУ. Исходя из того, что МО являются основой САПР САУ, их построение также должно быть автоматизировано, что позволит существенно расширить сферу применения САПР в целом, сократить время проектирования новых образцов и обеспечит повышение их качества.

Комплексная автоматизированная технология построения МО САУ была реализована в системе автоматизированного построения МО АЛМАК (Ю Б Подчуфаров, А П Матвеев [1987]). В основе технологии лежит унифицированное МО, которое может быть построено для гидро-, тепло- и электромеханических САУ с использованием фундаментальных законов сохранения и уравнений состояния. Для описания структур подсистем САУ различной физической природы используется язык схем замещения. Разработана единая схема замещения, основанная на сходных правилах построения и форм записи. Система включает анализ получаемых МО разнообразными методами. Программное обеспечение системы АЛМАК составлено в основном на языке АНАЛИТИК-79, использует его развитый аппарат символьных преобразований математических и строковых выражений, и ориентировано для работы на вычислительном комплексе СМ1410.

В А Коноплев [1989,1992] разработан оригинальный подход к формированию моделей сложных механических систем (кинематики, динамики и управления систем твердых и упругих тел) с использованием группы преобразований векторного пространства винтов (винтового исчисления). Центральное понятие метода – структурная матрица, которая содержит информацию о мгновенной конфигурации механической системы. С ее помощью получаются квазискорости звеньев и матрица Якоби уравнений связи. Алгоритмы позволяют независимо конструировать числовые и символьные формы моделей, обеспечивают экономичную по памяти и быстродействию организацию вычислений и их подготовки, осуществлять декомпозицию уравнений. Специальная форма записи обеспечивает скорость вычислений для динамики весьма сложной системы, близкую к теоретич-

сии оптимальной, позволяет организовать контроль и анализ правильности вычислений, решать сложные задачи динамики и управления в реальном времени В ряде задач комплекс АММУС использовал САВ САВАГ (В П Червонных [1989]).

Метод применялся в различных задачах стабилизации и управления сложными техническими системами, в том числе с разомкнутыми кинематическими цепями (В А Коноплев и др [1989]) Были рассмотрены вопросы управления судами космической службы, несущими массивные антенны, транспортными роботами, упругими колебаниями авиацайнера, системами технического зрения транспортных средств и др Разработан экономичный алгоритм компьютерного конструирования и исследования уравнений движения многозвездного динамического стенда (В А Коноплев, С В Колгунова и др. [1989]), которые используются для решения обратной задачи динамики и синтеза управления Сформированы уравнения динамики шагающего аппарата (И А Макаров, В П Червонных, Е В Пантелеев [1989])

Сложные задачи моделирования механических систем весьма большой размерности (сотни степеней свободы – для задач динамики вагонов, тепловозов, якорных и других систем) решаются Д Ю Погреловым [1991, 1995, 1999] с учениками в Брянске с помощью комплекса программ Универсальный Механизм, содержащего специализированную САВ Используется структурное представление объекта как дерева подсистем, уравнения движения формируются в символьном виде и затем численно моделируется динамика системы, с учетом ее структуры, возможности разбиения на блоки

3.6 Задачи управляемости, наблюдаемости искусственного интеллекта

Работа по созданию на ЭВМ системы логического вывода и поиска решений задач математического моделирования, динамики и управления для сложных нелинейных систем – пакета ЭВРОЛОГ (В М Матросов, С Н Васильев, В Г Карапуев, Е А Суменков [1984], И Н Ворожцова, М В Почтаренко [1990], V M Matrosov, V A Rayevsky и др [1994]) – ряд лет велась в Иркутском ВЦ РАН

Метод векторных функций Ляпунова (ВФЛ) является эффективным и строгим методом анализа динамических свойств сложных систем различной природы Теоретический аппарат метода ВФЛ составляют так называемые теоремы сравнения и теоремы о динамических свойствах Алгоритмизация и автоматизация вывода теорем с ВФЛ выполняется на основе принципа сравнения, в наиболее общей форме сформулированного как правило вывода теорем в исчислении предикатов Его дальнейшим развитием является общий метод вывода теорем, основанный на решении логических уравнений

Необходимые алгоритмы реализованы в пакете ВФЛ-1 (В М Матросов, С Н Васильев, В Г Карапуев, Е А Суменков [1984]) Пакет обеспечивает в диалоговом режиме выбор описания математической модели исследуемой системы, формализацию определений изучаемых динамических свойств, выбор описания системы сравнения и отношений связи, вывод лемм и теорем сравнения, а также теорем о динамических свойствах При работе в пакете обрабатываются различные типы символьных данных и теоретико-множественных объектов Эффективность разработанных алгоритмов превосходит эффективность универсальных алгоритмов, например, резолюционного типа, так как они практически исключают перебор в процессе вывода теорем Потеря универсальности компенсируется масштабностью рассматриваемых задач вывода теорем с ВФЛ и их аналогами, практической значимостью получаемых теорем и во многих случаях их новизной Опыт использования пакета и результаты докладывались на конгрессе IAC'94

Одной из подсистем ЭВРОЛОГа является САВ ДУМА (И Н Ворожцова, М В Почтаренко [1990]), позволяющая использовать методы компьютерной алгебры в

процессе решения задач динамики и управления. В нее включены пакеты, осуществляющие моделирование механических и управляемых систем, построение нелинейных и линеаризованных уравнений в окрестности частных решений, построение первых интегралов для некоторых классов ОДУ, получение необходимых и достаточных условий устойчивости. Символьные вычисления в ЭВРОЛОГ используются также для поддержки функционирования вычислительных пакетов.

При решении задач управления и наблюдения важную роль играют свойства управляемости, достижимости и наблюдаемости рассматриваемых динамических систем. Алгоритмы анализа подобных свойств присутствуют в ряде работ Е Я Сабитова [1977] и др., А С Землякова, Е Я Сабитова [1977] и др. И С Добринина, И И Карпова и Ф Л Черноуско [1994], Ю Котта [1992], Ю Котта и Р Роомельди [1987], А В Банщикова, Л А Бурлаковой, В Д Иртегова [1989] и других, – как элементы общего комплекса исследования, причем были реализованы в основном методы, ориентированные на линейные управляемые системы.

С С Войтенко и Е Я Смирнов [1983] рассматривали нелинейные динамические системы наблюдения с управлением общего вида. Для проверки критерии управляемости и наблюдаемости проводится вычисление итерированных производных Ли от векторных полей и скалярных функций, описывающих поведение динамической системы, определяется ранг матриц управляемости и наблюдаемости. Реализованы конструктивные критерии достижимости и наблюдаемости и простые алгоритмы их проверки, в виде пакета программ на Reduce, позволяющем в диалоговом режиме анализировать свойства системы.

Различные классические методы определения орбит по угловым измерениям (Гаусса, Лапласа) и их современные модификации приводят к необходимости решения систем нелинейных алгебраических уравнений Лагранжа. Результаты вычислительного эксперимента показывают, что при определении орбит ИСЗ наблюдателем, находящимся на орбите спутника Земли, известные итерационные методы решения системы уравнений Лагранжа зачастую сходятся к посторонним корням. Предложен способ решения, основанный на сведении различных методов к решению уравнения Лагранжа в канонической форме, отысканию всех его положительных корней и отбраковке посторонних по определенным критериям. Такой подход позволяет проводить анализ точности получаемых параметров орбиты. Создана система критериев применимости методов определения орбит для случая наблюдения с орбиты ИСЗ. Использовалась САВ Reduce.

Интеллектуализация работы САВ, использование ее не только для громоздких преобразований формул, но и в языковом аспекте (подобно рефалу и другим) при автоматизации программирования и решения прикладных задач ведется в Киеве, в рамках развития языка АНАЛИТИК (В П Клименко, А Л Ляхов [2003]). Новые возможности используются для автоматизации описания сложных объектов, поиска решения, сопряжения, согласования большого числа элементов и фрагментов вычислений (подробнее ниже, в разделе 3.9).

Дополнительный материал по ряду задач и САВ см. в разделе 2.4 и трудах конференций (Ленинград-88-89, Севастополь-91 и др.).

3.7 Небесная механика

Небесно-механические приложения аналитических вычислений были среди лидеров в применении САВ. Этому способствовал яркий вслеск интереса к прикладной небесной механике в связи с запуском искусственных спутников Земли, необходимость решения новых, существенно более сложных задач при условии обеспечения высокой степени точности. Классические методы небесной механики также подготовили задачи и математический аппарат для применения

САВ Были получены яркие результаты, служившие примером плодотворности аналитических вычислений на ЭВМ – D Barton [1966], а позже A Deptt и A Rom [1968] на САВ повторили классическую теорию движения Луны; Делоне (в рядах, которые строилась им 20 лет), причем была обнаружена ошибка в шестом приближении. Среди пионерских работ по САВ в нашей стране были и работы в области небесной механики – В А Брумберг [1963], В А Полозова и В А Шор [1963].

Небесно-механическим приложениям САВ и специализированным САВ было посвящено немало обзоров: M S Davis [1968], J Kovalevsky [1968], J van Hulzen, J Calmet [1983, 1985], J Calmet, J van Hulzen [1983]. В А Брумберг [1974, 1995], В А Брумберг, С В Тарасевич и Н Н Васильев [1989]. Н В Емельянов [1980, 1983], В С Уральская и С Г Журавлев [1980], В И. Скрипниченко [1975]. Информатор-83 и т д. Обзор САВ для ОТО был дан R A D'Inverno [1975] и, позже, С А Притомановым [1992]). Ряд работ – в трудах конференций «Ленинград-88,-89, С Петербурга-91,-92,-95» и в Томских сборниках «Астрономия и Геодезия». О некоторых работах говорилось выше, в разделах 1.1 и 1.3, поэтому описание может быть кратким. Решения задач и разработка систем САВ небесно-механического профиля представлены в списке литературы именами авторов. Некоторые задачи прикладной небесной механики (космодинамики) рассмотрены в главе 4.

Значительный потенциал универсальных и специализированных САВ для задач небесной механики был накоплен в Институте теоретической астрономии АН СССР (В А Брумберг, Н Н Васильев, И О Барабаев, А В Васильева, Л С Евдокимова, С В Тарасевич, Т В Иванова, А В Кузьмин, А Л Кутузов, А. Г. Сокольский, И И Шевченко и др., см. обзоры: В А Брумберг [1974], В А Брумберг, С В Тарасевич, Н Н Васильев [1989]). Был разработан ряд систем на БЭСМ-6 (фортран), с помощью которых решались задачи по теории движения Луны, планет, спутников планет, искусственных спутников Земли. Эти системы могли быть использованы при решении других задач, в которых осуществляются операции с рядами Тейлора Пуассона с полиномами Чебышева, с полиномами и рациональными функциями. Имелись алгоритмы Чебышевской аппроксимации, методы Цейпеля, Крылова-Боголюбова, арифметика чисел произвольной точности, быстрое вычисление значений рядов, содержащих тысячи членов (обобщение метода Горнера).

В Томском университете на базе САВ Авто-Аналитик (Е А Арайс, Г В Сибиряков) была построена специализированная система БОРА (Ю Б Шмидт) для операций с рядами Пуассона. Строились аналитические решения ограниченной задачи трех тел до 11 порядка малого параметра, полуаналитическая теория движения ИСЗ, аналитическая теория движения спутников Юпитера, алгоритмы преобразования Ли (Т В Бородовицина, Т С Бороненко, Л А Московкина, Ю Б Шмидт).

В общей теории относительности для операций над тензорами в ИТА АН была создана САВ GRATOS (С В Тарасевич, В А Брумберг). Строились приближенные уравнения движения для релятивистской задачи N тел, определялись гравитационные возмущения, вызываемые системой макроскопически изолированных тел, и др. Ряд решений в ОТО был получен В А Хлебниковым в МГУ [1976].

Работы по методам вычисления орбит ИСЗ был выполнены Н В Емельяновым в ГАИШ Московского университета, используя САВ ИТА АН СССР и свои специализированные программные системы аналитических преобразований.

Вопросы нормализации и устойчивости в различных задачах исследовались А П Маркеевым, А Г Сокольским, С В Медведевым, А Д Брюно, В Ф Единералом, О А Хрусталевым, В Д Иргетовым, М А Новиковым, И И Шевченко, С А Хованским.

В последние годы был решен ряд новых задач. Разработаны теории движения спутников с сильно эллиптическими орбитами (А Г Сокольский, А А Вахидов, Н Н Васильев [1995]). Т В Иванова [1997] с помощью новой версии УПП – PSP строит

ла теорию движения Луны с учетом возмущения планет Е А Гребеников с учениками [2002] исследовали устойчивость стационарных решений в новых задачах – ограниченной задаче N тел. В В Видякин [2004] с учениками применяли САВ для компактного построения силовой функции и ее производных в задачах о поступательно-вращательном движении N тел, в частности, планет

3.8 Моделирование и проектирование, планирование эксперимента

Один из типичных случаев применения САВ – это формирование модели объекта и просмотр многочисленных ее вариантов, анализа динамических свойств, – задача, часто возникающая при проектировании. Решение ее в символьном виде позволяет легче и быстрее исследовать характеристики механизма. Наряду с формализацией представления задачи, ее зависимости от конструктивных параметров, САВ используются на разных этапах моделирования, анализа свойств системы и т п. Диалог у САВ делает ее удобным инструментом исследования

В работе Д Бестле, В Шилена, П Эберхарда [1993] предложена процедура автоматизированного проектирования транспортного средства с активно управляемой подвеской, включающая составление математической модели и расчет оптимальных параметров. Автоматическое составление уравнений движения на компьютере и анализ чувствительности позволяют сократить время, требуемое для проектирования таких систем. Существенного улучшения качества подвесок можно добиться только на пути их оптимизации с использованием достаточно полной модели. Исходя из геометрического описания отдельных тел и соединяющих их шарниров САВ NEWEUL (Е Kreuzer, G Leister [1991]) формирует уравнения движений в символьном виде и строит соотношения для анализа чувствительности. Любой параметр, входящий в уравнения движения системы, может использоваться как варьируемая переменная. Частные производные по варьируемым переменным и фазовым координатам вычисляются при помощи пакета MAPLE. Уравнения движения и сопряженные уравнения интегрируются численно.

М Вукобратовича, Д Стокича [1989] описывают пакет программ для моделирования гибкого производственного модуля (ГПМ), включающего не менее двух роботов, способных обслуживать до десяти станков с ЧПУ (числовым программным управлением) различных типов. Моделирование роботов в ГПМ можно провести с использованием трех различных моделей: а) полной динамической модели робота, б) кинематической модели робота, в) простой модели робота в форме конечного автомата. Пакет для построения управления на всех уровнях позволяет выбирать закон управления и вычислять параметры управления. Чем сложнее модели и алгоритмы, тем лучше планирование, но за счет большего времени счета. Динамическая и кинематическая модели механической части робота формируются в символьно (М К Vukobratovic, N M Kircanski [1984])

М Вукобратович, Н Кирчанский, Т Петрович [1992] рассмотрели вопросы создания нового класса высокомоментных исполнительных механизмов с системами управления, позволяющими компенсировать нелинейные динамические воздействия во время работы манипулятора. Увеличение механических возможностей робота влечет необходимость обеспечения в его системе управления высокой частоты вычислений и высокой частоты квантования. Предложена новая структура регулятора робота, основанная на использовании центрального компьютера и последовательно соединенных процессоров конвейерного типа. Разработан новый алгоритм планирования распределения вычислений.

Предлагаемый алгоритм управления для последовательных процессоров конвейерного типа основывается на символьных моделях робота, поскольку их вычислительная сложность достаточно мала. Планирование осуществляется в два

этапа На первом этапе определяется группа операторов, которые могут быть вычислены параллельно На втором этапе формируется таблица зависимости символов и данных и вводится квадратичный критерий, учитывающий как время вычислений, так и время обмена информацией Минимизация этого критерия позволяет оптимизировать процесс планирования

При реализации регулятора динамической компенсации в контурах прямой или обратной связи важно выбрать наиболее эффективный способ моделирования динамики, чтобы минимизировать вычислительные операции, выполняемые каждым процессором Как известно, один из лучших методов моделирования основан на использовании символьных вычислений Дано описание построения символьной модели с подстановкой конкретных численных значений по мере надобности, изучается оптимальное сочетание символьных и численных преобразований Учет индивидуальной структуры робота значительно уменьшает вычислительную сложность его символьной модели по сравнению с численной Сравнивается вычислительная сложность предложенного символьно-численного метода с чисто символьной и численной на примере робота Стенфордская рука

Широкую картину применения САВ в моделировании и проектировании сложных механических систем дают материалы Симпозиумов IUTAM 1977 г в Мюнхене и 1986 г в Удине, собранные в книге под редакцией W Schiehlen [1990] Значительная часть представленных в ней работ выполнялась в специальных ВЦ, на фирмах, в Технических университетах и была рассчитана на автоматизацию технического проектирования и расчетов Область применения определяет совместное рассмотрение пакетов программ численных, символьных и смешанных Технические направления, определившие разработку и распространение ведущих и старейших из систем проектирование автомобилей и транспорта, движения спутников, манипуляторов и роботов, в том числе в атомной энергетике

Приведенные в книге 20 программных комплексов для автоматизации исследования механики систем многих тел различны по уровню количеству пользователей, совершенству возможностей Знаменитая ADAMS (численная с САВ компонентой, Ann Arbor, США) имела более 500 пользователей, свои конференции пользователей (Детройт, 1986, 4 и 5 Европейская, Марбург, ФРГ, 1987, 1988, Ann Arbor, 1988, Токио, 1989 и др.) Три следующие по числу пользователей имели их более 100 Одна из них, AUTOLEV, численно-символьная (D A Levinson, T R Kane [1990], Стенфордский университет, Калифорния) Среди авторов систем есть известные ученые, авторы оригинальных методик D Paul [1975] (также W Schiehlen [1990]) (системы DYMAC для проектирования автомобилей, DYSPAM - для спутников, Пансильвания, США), M Vukobratovic с соавторами, Белград (SYM), L Lilov и др. София (CAMS), J Wittenburg с соавторами [1990], Карлсруэ, ФРГ (MESA VERDE), W Schiehlen, E Kreuzer и W Shiehlen [1990, 1991] (NEWEUL) Есть системы мало распространенные, недавно выполненные, есть символьные аналоги уже развитых численных систем (ROBOTRAN из системы AUTODYN, Лувен, Бельгия) Среди приведенных систем больше половины (и почти все САВ) - европейские, однако не все известные зарубежные САВ были охвачены - например, система K Hendel [1989] (Карл-Маркс-Штадте)

Почти все системы написаны на фортране, бывают компоненты на паскале и си (и одновременно символьную компоненту) Спектр приложений большинства систем очень широкий транспортные устройства (автомобили, вагоны), авиация и спутники, машины и механизмы, манипуляторы и роботы, движение человека и спорт Почти все системы используются во всех перечисленных направлениях (ведь половина из них имеет более 20 пользователей) Во многих случаях исследование механической системы учитывало системы управления Системы

тестировались на двух примерах движении плоского семизвездного механизма с замкнутым контуром и одной степенью свободы и манипулятора с пятью степенями свободы - с графическим представлением результатов моделирования

При проектировании решение задачи в символьном виде позволяет легче и быстрее проводить монтаж системы, варьировать ее компоновку и заменять отдельные узлы, изучать характеристики, исследовать устройства управления и поведение объекта, находящегося под их воздействием устойчивость, переходные и колебательные процессы, и прочее Автоматизация захватывает задачи проектирования машин и механизмов, включая этап составления уравнений движения изучаемых объектов, проектирование и исследование систем радиоэлектронники, создание проблемно-ориентированных языков САПР Использовались специализированные и универсальные САВ (см. выше в разд. 1.3, 2.4 и в табл. 3, где дан материал и по конкретным работам) Доклад о применении САВ в системах САПР был сделан еще в Горьком-84 А В Сергиевским и М А Чубаровым

В Ленинградском электротехническом институте разработана специализированная система СПИН для построения математических моделей гироколических устройств (Р И Сольницев [1985], Р И Сольницев, И В Ковтун, А С Пресняк [1981]) Система уравнений Лагранжа II рода формируется по геометрическому описанию Есть процедуры линеаризации уравнений, приведения к форме Коши, представления уравнений в матричном виде и т д Электрическая часть системы описывается передаточными функциями Общение с системой осуществляется на специальном проблемно-ориентированном языке С помощью пакета получены полные математические модели гировертикали на подвижном основании, трехосного гиростабилизатора и некоторых других устройств Пакет использовался в учебном процессе в курсе САПР электромеханических приборов

В Киевском политехническом институте разработана специализированная система для автоматизированного составления уравнений движения системы твердых тел с упругими связями (ММТ-1/УТ, С Я Свищунов, И В Губарь, О Н Ковбаско [1984] и др.) Пакет обеспечивает решение двух основных задач составление дифференциальных уравнений движения высокой степени приближения и исследование их численными методами, такими как интегрирование линейных и нелинейных систем уравнений, вычисление собственных значений и собственных векторов, усреднение Составлялись и исследовались уравнения гироинтегратора, гиростабилизированной платформы и др

В САПР радиотехники САВ на малых компьютерах помогали создать «интеллектуальный терминал», позволяющий вести работу на привычном проблемном языке достаточно высокого уровня (А А Молчанов, И Ф Зинченко [1988])

Систему планирования физического эксперимента Сопр-НЕР – его моделирования с целью оптимизации и повышения эффективности для задач ядерной физики разработали З Э Боос, М Н Дубинин, В Ф Еднерал и др [1989] в НИЯФ физфака МГУ На ее примере ярко видны особенности этого класса задач и достоинства САВ при их решении на этапе formalизации задачи, организации взаимодействия системы с пользователем (проблемно-ориентированный диалог и сервис) Поэтому мы отмечаем эту систему среди САВ механического профиля

Сведения о ряде разработок и задач см. также в 2.4, 2.5 и в материалах конференций Ленинград-88,-89, Вильнюс-90, Севастополь-91 и других

3.9 САВ и задачи механики сплошных сред

В механике сплошных сред использование САВ началось с самых первых дней Среди первых отечественных работ по САВ мы видим работы по теории упругости В К Кабулова [1963] и его ученика В А Толока [1964] в Ташкенте Поли-

номиальная система ПРОРАБ, созданная в Ленинграде Т Н Смирновой [1962], применялась в этой же области, одна из публикаций ее помещена в качестве приложения к известной книге С Г Михлина К пионерским работам по САВ относятся и первые труды Н Н Яненко (В А Шурыгин и Н Н Яненко [1961]) по дифференциальным формам для задач газодинамики, развитые впоследствии им с учениками (Е А Арайс, Н Н Яненко [1972], А Н Валлиулин, В П Шапеев и др. также в гл 4) Имелись обзоры А А Самарского и М Ю Шашкова [1984] в задачах вычислительной математики, В И Савченко [1988] и др в механике твердого тела

Применению САВ в механике твердого деформируемого тела, в области упругости и прочности способствует многое – важность разнообразных задач, громоздкость применяемых вычислений, развитие аналитических методов представления решений в форме рядов разного рода (многие из которых были развиты отечественными учеными, в частности, в научных школах Ленинграда, Москвы, Ростова на Дону) САВ применялись при автоматизации вывода громоздких уравнений и в методе конечного элемента (МКЭ). Построение решения с помощью аналитических разложений по системам Функций в теории оболочек успешно использовались киевской школой В А Савченко в задачах с ребрами, угловыми точками и другими особенностями, когда плохо работают численные методы

Работы по САВ в механике твердого деформируемого тела были представлены на многих конференциях по САВ. Не являясь специалистами в этой области и не отслеживая соответствующие работы, мы, чтобы дать некоторое представление о них, решили выбрать ряд ссылок из материалов нескольких конференций, где они были достаточно хорошо представлены. Названия работ нередко характеризуют предмет и метод исследования. Выбраны конференции и работы

- Горький-84 В Б Анисимова, В П Савченко и др., Г Г Гордеев, А А Илюхин, Б П Довгий, Л В Мольченко, Ю И Клюев и др., В Е Крюченко, С Н Леора и др., В А Гордон и др., В П Годенко, В И Герман, В Кобелев, Л В Проворов и др., В Н Мартыненко, М А Мартыненко, А М Чеповский. – все [1984]
- Вильнюс-84 Р В Белявичус, Р А Бараускас и др., А С Гульбинас и др., А П Кульветис, Г П Кульветис – все [1984]
- Киев-88 В И Савченко, В Б Анисимова, Ю Н Намиш, И В Алексеева, А Б Мовчан, А А Капшивый, Л Н Ломонос, Н Н Стоян, Е В Воскресенская, В И Демура, В Н Мартыненко и М А Мартыненко – все [1990]
- Минск-97 А Н Спорыхин, О С Черненко, А О Ватульян, А Н Соловьев, Ю В Позняк, А В Чигарев, С В Воробьев, О В Машкова – все [1987]

Надеемся, что такой способ даст некоторое представление о возможностях и практике использования САВ в этой важной области механики. Примером применения САВ в одной из работ недавнего времени – уже привычного, без упоминания о САВ – может служить статья О Н Дмитриенко и Д Ю Погорелова [2003].

Еще одним современным примером служит цикл работ А.Л.Ляхова, использующего АНАЛИТИК в последних версиях (-93,-2000, В П Клименко, А А Морозов и др [1995]). Кроме традиционных применений САВ в громоздких преобразованиях формул, в них развивается "языковое" использование АНАЛИТИК (подобно рефалу и другим языкам, В П Клименко, А Л Ляхов [2003]) – для описания сложных объектов, автоматизация поиска решения, сопряжения, согласования большого числа элементов и фрагментов вычислений – в задачах упругости.

Первая группа задач касается геометрического проектирования, когда объект задается набором фрагментов со своими описаниями, системами уравнений, данных, условиями сопряжения и т п. Указанный подход и мат обеспечение позволяют генерировать описания, базу данных, аналитические выражения для

фрагментов объекта, ихстыковку и сориентацию по исходным данным. Пример – программное обеспечение расчета геометрических центров деформации при прокате фасонных профилей (трамвайного рельса – 29 фрагментов описания объекта, 116 систем уравнений для построения решения). Другая задача – моделирование изгиба композитных брусьев кусочно-однородной структуры. Сложность ее в вычислении двойных интегралов как функции параметров для подынтегральной функции с разрывами первого рода на границе заданного многоугольника. Моменты переключения вида функции при переходе границы определяются в процессе счета, что весьма трудоемко и встречается в различных приложениях. Формальное описание объекта и задачи, как текста позволяет проводить проверку корректности, сопряжения фрагментов, а также генерацию программ для численного счета (А.Л.Ляхов [1999]).

Третья группа задач – создание программного обеспечения для подготовки программ численного моделирования на базе МКЭ для пространственной задачи теории упругости с учетом внутренних включений. Использование системы фундаментальных решений (с применением САВ, и высокой точностью расчтотов) затрудняется громоздкостью и трудоемкостью на подготовительном этапе (стыковка данных на границах включений). АНАЛИТИК-93 позволяет генерировать автоматически описание объекта, программ на Фортране MS, преобразование, анализ и контроль фортранных текстов, учет связей и зависимостей между ними, контроль и согласование, верификацию программ (А.Л.Ляхов [1998]).

К анализу и численным методам механики сплошных сред относятся исследования по дифференциальным формам Н.Н.Яненко и его учеников В.П.Шапеева, А.Н.Валлиупина, В.Г.Ганжи, Е.А.Арайса и других, а также В.Л.Толунова (см. эти фамилии и гл. 4). К групповому анализу, совместности и разрешимости уравнений механики сплошных относятся работы В.Л.Каткова, В.В.Корняка и В.И.Фущича, В.Л.Берковича, А.А.Бармина и других. Вычислительные аспекты рассмотрели А.А.Самарский, М.Ю.Шашков [1984]. Об автоматизации построения разностных схем см. у М.Ю.Шашкова, И.Б.Щенкова [1983], С.И.Мазурика, В.П.Шапеева [1984].

В других областях механики сплошных сред (гидро-, аэромеханике и механике плазмы) построения решений в рядах не столь многочисленны, как в механике деформируемого тела. Приведем некоторые ссылки из числа старых работ А.Берс, J.L.Кулп и C.F.F.Каглеу [1976], Л.Н.Платонова и М.Ю.Шашков [1983], Б.А.Бублик и В.А.Щербина [1984], Я.М.Каждан, И.Б.Щенков [1989], Д.Л.Шишков [1989], С.Я.Герценштейн, Е.Б.Родичев, В.М.Шмидт [1984].

В заключение отметим, что САВ использовались не только в механике. Их применение в математике, – как для задач математически, так и при реализации в различных методов и алгоритмов, – было затронуто выше, в разделе 2.1. О некоторые из математических САВ, алгоритмах и их применений можно получить представление по названиям статей в списке литературы. Много материала имеется в трудах Дубнинских конференций. Вопросы обучения обсуждались в главе 1.

САВ использовались и при решении разнообразных задач физики. Известный обзор В.П.Гердта, О.В.Тарасова и Д.В.Ширкова [1980], привлекший широкое внимание к символическим преобразованиям, опирался на применения САВ в теоретической физике и физике высоких энергий. В нашей стране эти работы велись в ОИЯИ в Дубне, в НИИ ЯФ МГУ, в ИЯФ СО АН в Новосибирске и других местах. Работы по физике см. Дубна-80,-83,-85,-90,-2001.

Число задач, для решения которых привлекаются САВ, велико и непрерывно растет. Многие из них, несомненно, остались вне нашего поля зрения.

Глава 4 Символьные вычисления в Институте прикладной математики имени М В Келдыша

Институт прикладной математики Российской Академии наук был создан М В Келдышем в 1953 году для решения важнейших комплексных научных задач, первоначально – для расчетов в связи с созданием ядерного оружия. Затем это были задачи освоения космоса, кибернетика, ядерная физика и термоядерный синтез, программирование. Институт объединил специалистов различных областей – физиков, математиков, механиков, программистов и создателей вычислительных машин. Среди них – такие крупные ученые как А Н Тихонов, К И Бабенко, И М Гельфанд, И Б Зельдович, С П Курдюмов, А А Ляпунов, О Б Лупанов, А Н Мямылин, Д Е Охоцимский, А А Самарский, К А Семендаев, М Р Шура-Бура, Т М Энгельс, В С Яблонский и многие другие. Соединение сложных задач и разнообразных математических методов с активным, пионерским использованием вычислительной техники, энтузиазмом развития ее – дали немало ярких идей. Мысли о символьных вычислениях возникли вскоре после создания ЭВМ, как желание научить их работать с формулами и облегчить громоздкий труд физика или механика. На примере старейшего вычислительного центра нашей страны (а также работ сотрудничавших коллективов) рассмотрены тенденции в развитии и применении Символьных Преобразований (Символьных Аналитических Вычислений – САВ, или Компьютерной Алгебры, как их называют сейчас), затрагиваются исследования и в смежных областях символьных, не численных вычислений. Часть материала пересекается с изложением предыдущих глав.

1 Интересно проследить истоки работ по САВ в нашей стране. А П Ершов и М Р Шура-Бура [1976] в своем историческом обзоре упоминают только работы ленинградцев по САВ. Перечислим некоторые пионерские работы по САВ первой половины 1960-х годов.

Постановка задачи САВ впервые прозвучала в пленарном докладе А А Дородницына [1956] на Первой Всесоюзной конференции по программированию 1956 года построить на компьютере решение в виде двух аналитических асимптотик, соединенных в единое решение численно. Физический смысл задачи – исследование ядерного взрыва в атмосфере, которым тогда усиленно занимались, в том числе в ИПМ (тогда – засекреченном Отделении прикладной математики Математического института им В А Стеклова АН СССР), где А А Дородницын заведовал отделом до организации ВЦ АН СССР в 1954 году. Две асимптотики – вблизи центра взрыва и на удалении от него. Построение Д Е Охоцимского [1964] в точности соответствует этой постановке, только относится к динамике космического полета – состоит из двух асимптотик, объединяемых участком численного счета. На постановку А А Дородницына ссылается А А Столпий [1962], ученик В М Глушкова, предложивший алгоритм дифференцирования функции (реализованный на МЭСМ, одной из первых ЭВМ) и построения аналитического решения на компьютере – вероятно, первая работа известной киевской школы по САВ (в которой был создан язык САВ АНАЛИТИК, реализованный аппаратно и, позже, программно, и разнообразные его приложения В М Глушков и др [1971]).

Одновременно в Ленинградском отделении МИАН им В А Стеклова Л В Канторович с сотрудниками (также участвовавшие в атомном проекте) работали над задачами САВ. В докладах на Математическом съезде Л В Канторович [1957] предлагает идеи о представлении данных в САВ. Т Н Смирнова [1962] создает полиномиальную систему аналитических вычислений (САВ) «Полиномиальный Прораб», впоследствии использованную в задачах теории упругости В А Брум-

берг [1963], Н Г Полозова и В А Шор [1962] в Институте теоретической астрономии АН СССР начинают работы по САВ, широко развитые позже

Н Н Яненко в сборнике «Проблемы кибернетики» [1961] исследовал и реализовал на Стреле метод Картана анализа совместимости систем дифференциальных уравнений в частных производных Н Н Яненко был первым ученым секретарем ИПМ, после работы в закрытом научном центре на Урале (где, вероятно, выполнена эта работа), он работал в ИТПМ СО АН СССР в Новосибирске, где активно развивал САВ В Новосибирске собрались многие из пионеров САВ, включая Л В Канторовича А П Ершов с сотрудниками много работали по САВ в ВЦ СО АН СССР в Новосибирске, обзор их ранних работ дан у М М Бежановой, В Л Каткова, И В Поттосина [1972] и А М Miolla, I V Pottosin [1981] До 1961 года А П Ершов он работал в ВЦ АН СССР, но в обзоре с М Р Шурой-Бурой о САВ не упоминается)

Работы по САВ выполнялись и в Ташкенте, В.К Кабуловым [1963] и его учеником В А Толоком [1964] с приложением к различным задачам теории упругости

2 Первой областью применения САВ в ОПМ-ИПМ была прикладная небесная механика В ней имелся классический задел применения полиномиальных построений разного вида и целый ряд задач Попытки автоматизировать эту работу относятся к началу 60-х годов Выкладки с тригонометрическими и степенными рядами были проделаны З П Власовой и И Б Задыхайло еще на одном из первых советских компьютеров Стрела (не опубликовано) Д Е Охочимский [1964] (также на Стреле) построил универсальное решение для разгона космического аппарата с малой тягой. Две асимптотики монотонно изменяющегося решения строились в виде степенных формальных рядов вблизи сингулярных точек и соединялись в регулярной области числено Г Б Ефимов [1970] развивал этот подход для простейших рядов Пуассона (тригонометрически-степенных) при построении с помощью САВ оптимальной траектории разгона с малой тягой Программировала обе задачи Т И Фролова

С 1970 года А П Маркеев [1970] использовал САВ для нормализации гамильтоновых систем и анализа устойчивости периодических решений Дальнейшие шаги в этом направлении были сделаны А П Маркеевым и А Г Сокольским [1975] Созданная ими научная школа успешно развивалась затем в Московском авиационном институте и Институте теоретической астрономии (А Г Сокольский [1981 1991]), где была также известная школа по САВ В А Брумберга В трудные 1990-е годы в ИТА регулярно собирались конференции, где была представлена и тематика САВ В МАИ работы по САВ развивались и в направлении компьютерного обучения – А П Маркеев и др [1985], В Г Веретенников и др [1990] В А Сарычев и С А Гутник [1984] применяли САВ в задаче об устойчивости равновесия спутника О работах по небесной механике школы А Д Брюно скажем ниже

Большие, масштабные задачи, решавшиеся в ИПМ, а также дефицит машинных ресурсов с трудом позволяли использовать символьные преобразования и те примитивные САВ, которые тогда существовали Вместо этого создавались алгоритмы, близкие САВ идеально, позволявшие решать нужные задачи иным путем М Л Лидовым и его учениками, начиная с 60-х годов проводились, эксперименты по САВ З П Довженко [1963] создала и использовала полиномиальную САВ (на Алголе) для построения решения задачи Хилла Л М Бакума создавала систему для рядов Пуассона Дефицит ресурсов при общности подхода в разработке и применении САВ не позволил уйти дальше экспериментов М Л Лидовым [1978] был предложен численно-аналитический метод, позволяющий избежать громоздких выкладок (требующих применения САВ) Для расчета эволюции спут-

никовых орбит при возмущениях различного рода аналитически строилась функция Гамильтона (часто с использованием осреднения). Ее дифференцирование, нужное для построения уравнений движения, преобразования координат (от точных к осредненным и обратно) и вычисления правых частей уравнений движения (на каждом шаге интегрирования), проводились численно, через разности. Этим методом был решен ряд задач динамики спутников (М А Вашковьяк [1983], диссертации А А Соловьева [1974] и Ю Ф Гордеевой [1973]).

Пример работ М Л Лидова демонстрирует причины ограниченного успеха САВ в ИПМ, разочарования в них. Первые системы САВ общего типа имели слабые возможности, низкую эффективность и плохое соединение с численными программами. САВ удавалось использовать либо для очень специальных, либо для методических задач. Серьезность решаемых в Институте задач, при постоянной нехватке машинных ресурсов создавало трудности с применением САВ, толкало на поиск нужного решения иными способами, как это сделал М Л Лидов. Становилось ясно, что алгоритмы и программы САВ являются самостоятельной областью и требуют специальной разработки. Среди механиков ИПМ попытку создать универсальную САВ на БЭСМ-6 предприняли Ю А Садов и Е Ю Скляренко [1972].

З. Интересной страницей в отечественной кибернетике является Рефал В Ф Турчина [1968, 1971], основанный на новом принципе программирования – ассоциативной обработке текстов на основе теории рекурсивных функций, без адресного управления программой. САВ оказалась среди потенциальных областей приложения нового языка – В Ф Турчин [1972]. Первая реализация языка носила скорее «научный», чем прикладной характер, язык оказался изолированным от «обычного» матобеспечения – численных пакетов, поддержки библиотек, распределения памяти и т.д. Потребовались дополнительные усилия многих людей, чтобы сделать дальнейшие модификации Рефала практически используемыми, в частности, для приложений САВ С Н Флоренцев, С А Романенко, Анд В Климов и другие были авторами первых эффективных Рефал-компиляторов.

Первым применением Рефала в символьных преобразованиях было решение А П Будником, В Ф Турчиным и др [1970] задач ядерной физики. И Б Щенков [1984, 1989] разработал САВ общего назначения SANTRA и позже модифицировал ее. На ее основе им вместе с М Ю Шашковым [1983] была создана специальная прикладная система DISLAN для построения нестандартных разностных схем. М Л Лидов и Л М Бакума (как уже отмечалось) были среди первых пользователей Рефала в прикладной области. Аналогичные попытки в теории групп были предприняты Н Х Ибрагимовым и И Б Щенковым.

Группа энтузиастов Рефала и САВ объединялась вокруг ИПМ и работала в тесном контакте с Институтом В Л Топунов [1975] со своими коллегами из МГПИ использовали САВ на Рефале в дифференциальной геометрии. Вместе с В П Шапеевым и другими учениками Н Н Яненко в ИТПМ СО АН СССР в Новосибирске они реализовали метод внешних форм Картана и исследовали характеристики дифференциальных схем (А Е Арайс, В П Шапеев и др [1982]) в развитие ранних работ Н Н Яненко [1962]. Л В Проворов [1982] в ЦАГИ им Н Е Жуковского широко использовал САВ АЛЬКОР в инженерных приложениях. О М Городецкий и А В Корлюков (Гродно) [1984] создали САВ для моделирования динамики гироколических систем (для Д М Климова, см также его работы). А В Корлюков [1985] реализовал алгоритмы специальных арифметик. Л В Белоус [1984] в Харькове с помощью Рефала объединял несколько разных САВ в единую систему.

В ИПМ им Келдыша под руководством А Н Мямлина, И Б Задыхайло и В К Смирнова изучались возможности повышения эффективности ЭВМ с помощью

Рефал-процессора (И Б Задыхайло, С С Камынин, З З Любимский [1971], А Н Мяmlin, И Б Задыхайло, В. К Смирнов [1974]). Имелось в виду, что могут быть созданы специализированные блоки (или компьютеры в едином комплексе), эффективно решающие вычисления различного типа, – в том числе символьного, не численные, включая САВ (для которых перспективным являлся Рефал). Л. К Эйсмонт [1977] проводил анализ эффективности Рефала и его аппаратной реализации, в том числе с точки зрения создания САВ. Под руководством В. К Смирнова на ЕС-2635 с микропрограммированием был создан Рефал-процессор ЕС-2702, работающий с машинами ряда ЕС (И Б Задыхайло, А Н Мяmlin, В. К Смирнов [1980], А Н Мяmlin, В. К Смирнов, С. Л Головков [1980], история создания – В. К Смирнов [2003]). На нем решались как задачи трансляции, так и задачи САВ (В. К Смирнов, В. Л Толунов, Д. Л Шишков [1991]).

Первоначально РЕФАЛ планировался как мета-язык. Действительно, он использовался в работе с языками программирования, для создания трансляторов, в широком круге текстовых задач, смежных с САВ в разной степени. С. П. Бычков, А. И. Хорошилов, В. А. Фисун и др. [1975] на базе Рефала реализовали языки моделирования Симула-1, ДИНАМО, были созданы комплексы для космических тренажеров ТРИКС, конвертор Алгол-Фортран для больших физических пакетов. Создавались эмуляторы для ряда специальных компьютеров, например, Ю. Ф. Голубевым для бортового компьютера спутника. Под руководством И. Б. Задыхайло и Л. К. Эйсмента автоматализировалось масштабирование вычислений бортовой вычислительной машины для компенсации потери точности из-за вычислений на ней с фиксированной запятой. А. Н. Андрианов и К. Н. Ефимкин и др. [1990] в системе Норма автоматизировали программирование разностных схем.

В свое время Н. Н. Яненко и другие считали, что наше отставание в компьютерной области из-за элементной базы может быть компенсировано за счет оригинальной архитектуры компьютера, совершенства математических алгоритмов и реализующих их пакетов программ. На этом направлении под руководством К. И. Бабенко, А. В. Забродина, и И. Б. Задыхайло [1961] исследовалась возможность создания высоко производительного параллельного компьютера для прикладных задач, в том числе задач механики и газодинамики. В недавнее время этот теоретический задел был использован при создании отечественных суперкомпьютеров (А. В. Забродин [2000]). Технология создания математического обеспечения, использующая Рефал, была успешно использована при создании программной среды для них (А. О. Лацис [2003]).

4 Неудачи и трудности применения символьных преобразований (на раннем этапе) в задачах, характерных для ИМП, вызвали ощущение разочарования у ряда ведущих ученых в институте САВ. оказались слишком сложными и трудоемкими при их создании и неудобными при использовании уже существующих. Высокий уровень программирования пользователей позволял решать, казалось бы, все нужные вопросы и помимо САВ. Но ведь так же с пренебрежением относились в свое время и к другим необходимым возможностям, – например, буквенному вводу-выводу, удобству общения с компьютером.

В начале 1980-х годов САВ достигли определенных успехов. Встал задача пропагандировать возможности и распространять опыт применения САВ, особенно в задачах механики, – например, демонстрируя их полезность на различных шагах схемы вычислительного эксперимента А. А. Самарского (А. А. Самарский, М. Ю. Шашков [1984], также Г. Б. Ефимов [1983], М. В. Грошева, Г. Б. Ефимов [1968]). Удалось использовать САВ для автоматизации построения разностных схем в областях нерегулярности (М. Ю. Шашков, И. Б. Щенков [1982]). Эта работа

привлекла внимание А А Самарского, одного из лидеров Института и отечественной вычислительной математики С его помощью Институт стал одним из основных организаторов Всесоюзной конференции по применениюм САВ в механике (*Горький-1984*), которая явилась демонстрацией достижений и подведением итогов работ по САВ в стране за двадцать лет

Опыт работы математиков, прикладников и программистов давал основу для обобщений по САВ, объединения и четкого разделения различных точек зрения на них Г Б Ефимовым, М В Грошевой, Е Ю Зуевой (*Информатор-83*, М В Грошева, Г Б Ефимов [1983, 1989, 1991, 1998]), была предпринята работа по описанию САВ, классификации их и их свойств по образцу пакетов прикладных программ Сводные таблицы характеристик ряда наиболее известных отечественных САВ оказались интересными как для пользователей, так и для разработчиков. Заказанный в 1990 году ВНИТИ обзор М В Грошевой, Г Б Ефимова, В А Самсонова [1992] по приложениям САВ в механике из-за трудностей издательства вышел лишь как Отчет ИПМ и Института Механики МГУ

Еще одной областью применения САВ является динамика сложных механических систем – гироскопов, роботов и манипуляторов, космических систем (см выше, также – Д М Клинов, В М Руденко и др [1984, 1989]). Здесь объектом применения САВ является формирование уравнений движения механической системы, их преобразования и анализ – поиск стационарных решений, определения устойчивости и т.д. (Г Б Ефимов и др [1977], Д Ю Погорелов [1993], И Р Белоусов [2002]). В этой области САВ развивалась пользователями механиками, причем существующие САВ часто не могли быть использованы из-за проблем с машинными ресурсами или различия в специфике самих механических систем и алгоритмов их исследования. Каждый делал свою специализированную САВ с ограниченными возможностями, приспособленную к узкому классу задач и алгоритмов (таких САВ было создано более десятка, см гл 2). В некоторых случаях трудности использования САВ приводили к решению этих задач иными методами (И Р Белоусов [2002]). Встал вопрос о соотношении между целым рядом таких, казалось бы, подобных САВ, а также ими и САВ универсального типа, возникла задача классификации САВ, их свойств и возможностей (см выше, глава 2) и по применению САВ в механике. Активно функционировала рабочая группа по САВ для сложных систем механики, организовывались конференции, семинары, публикации работ по САВ (например, *Информатор-83*, *Горький-84*, *Вильнюс-84* и *Вильнюс-90*, *Аналитические ПП-89*, *Ленинград-88* и *Ленинград-89*). Системы этого типа использовались в компьютерном и механическом образовании, например, учеником В В Белецкого Д Ю Погореловым [1993].

За долгие годы в ИПМ было выполнено немало исследований с использованием САВ. Работы по разностным схемам развивались в Институте И Б Щековым, М Ю Шашковым и другими, в том числе в контакте с учениками Н Н Яненко в Новосибирске (А Н Валлиуллин, В Г Ганжа, В П Шапеев и др.), давно применявшими САВ в этой области. По гидро и газодинамике были сделаны также работы Я М Кажданом, И Б Щенковым [1989], Л Н Платоновой и М Ю Шашковым [1983].

Не в ИПМ, но вблизи него, проводились исследования на известной САВ *АНАЛИТИК* (на языке того же названия), аппаратно реализованной на оригинальном компьютере "МИР-2" (В М Глушков и др [1974], В П Клименко, Ю С Фишман и другие, реализации на компьютерах СМ-4 и ЕС не получили широкого распространения). На нем В А Хлебников [1976], сотрудник отдела Я Б Зельдовича, еще студентом в МГУ решал громоздкие задачи общей теории относительности З Э Шноль в Пущино (где он и А М Молчанов, ветераны ИПМ, создали НИВЦ) поощ-

рял развитие САВ для задач применения математики в биологии например. Г П Крейцер [1975] на АНАЛИТИКе создал программы для анализа поведения решения системы дифференциальных уравнений Вопросы САВ обсуждались на ежегодных конференциях НИВЦ в Пущино

В 1980-е годы ведущим центром по САВ стал ОИЯИ в Дубне, где развивали и использовали в основном Лисп ориентированную САВ Редьюс. Его использовали для математических и физических приложений, развития алгоритмов, консультировали по Редьюсу и распространяли его по стране Конференции в Дубне и Семинар на физ-факе МГУ были ведущими по САВ (Дубна-80,-83,-85,-90,-2001) Однако в ИПМ Редьюс не получил большого распространения из-за высоких требований к машинным ресурсам (при постоянном их дефиците), слабого интерфейса с численными вычислениями, отсутствия сопровождения и консультаций

Что касается разработки систем САВ в ИПМ, то в первое время создавались, как правило, узко специализированные системы для конкретных задач (Д Е Охочимский [1964], Г Б Ефимов [1970], А П Маркеев [1970,1975]) Затем наступила пора САВ более общего типа (Е Ю Скляренко [1972]) Г Б Ефимов (*Информатор-83*, [1977,1984], разработал систему аналитических вычислений ПАС для работы с большим числом переменных, использованную в задачах двуногого шагания и управления На Рефале развивались и универсальные и специализированные системы (И Б Щенков [1984,1989], Л В Проворов [1982], М Ю Шашков [1983] и др.) В последующий период использовались общеизвестные современные САВ с реализацией необходимых алгоритмов на их базе В системе Редьюс, например, работали Л Н Платонова и М Ю Шашков, С А Гутник и В А Сарычев, И Р Белоусов [2002] и другие В последние годы САВ в составе больших пакетов программ на ПК (см С А Абрамов, Е Б Зима, В А Ростовцев [1992], Н Н Васильев, В Ф Еднерал [1994], В П Дьяконов [1993]) используется многими как необходимый и привычный инструмент (например, при выводе и преобразовании систем уравнений в задачах оптимизации, М С Константинов и др [2001], В Г Петухов [2004]), уже без специального упоминания

Среди работ последнего периода – укажем работы по многогранникам Ньютона и небесной механике, проводимые А Д Брюно (A D Brønno [1994]) и его школой В Ф Еднерал реализовал алгоритмы нормализации гамильтоновых систем А Солеев и А Б Арансон [1994] исследовали многогранники Ньютона С Ю Садов [1995] и В П Варин (А Д Брюно, В П Варин [1995]) исследовали устойчивость движения в задачах небесной механики и периодические решения уравнений колебаний спутников А С Кулешов [2002] обобщил классическую работу Чаплыгина, применив Marvl-V, А В Ниukkanen и И Б Щенков [2003] разработали систему преобразования для гипергеометрических рядов

За несколько последних лет выполнен ряд работ по истории развития и применения САВ и программных систем САВ M Grosheva, G Efimov [1998] (*Prague-88*), Г Б Ефимов, Е Ю Зуева, И Б Щенков [2001], В К Смирнов [2003] Секция по истории отечественных исследований по САВ была организована на конференции IMACS ACA'98 в Праге, *Prage-98* К работам по истории, выполненным в Институте, относится и настоящий обзор

ЛИТЕРАТУРА

- Абрамов С А [1973] PR - система для проведения действий над рациональными выражениями - В сб Алгоритмы и алгоритмические языки (Москва), 1973, N 6, 88-112 – РЖ Мат, 1974, 68963 Абрамов С А О суммировании рациональных функций - Ж вычисл мат имат физ (ЖВМ и МФ), 1971, 11, N 4 1071-1075
- Абрамов С А [1989] Задачи компьютерной алгебры, связанные с поиском полиномиальных решений линейных дифференциальных и разностных уравнений – Вестн МГУ, Сер 15 Выч.мат киберн 1989, N 3, 56-60 Абрамов С А Рациональные решения линейных дифференциальных и разностных уравнений с полиномиальными коэффициентами ЖВМ и МФ, 1989, 29, N 11, 1611-1620
- Абрамов С А , Квашенко Ю.Ю [1992] Неполная факторизация и НОД-технология, – Программирование 1992 №5, 45-50 S A Abramov, M Petrovsek Minimal multiplicative and additive decompositions of Hypergeometric terms in one variable - Дубна-2001 17
- Абрамов С А , Зима Е.В , Ростовцев В А [1992] Компьютерная алгебра - Программирование 1992 N 5, 4-25
- Абратов Д А [2001] О симметриях гамильтоновых систем с 3/2 степенями свободы, порожденных полным набором интегралов Задачи исслед.устойч и стабилизаци движ Ч 2 ВЦ РАН 2000 3-28 Таюка Тез 5 Междунар симпоз по классич и небесн механике Великие Луки, авг.2001 М ВЦ РАН 2001 8-9
- Адамчик В С , Кильбас А А , Лучко Ю Ф , Маричев О И [1992] О вычислении дробных интегралов и производных в системе Reduce - ППП Программное обеспечение математического моделирования М , 1992, 24-36 V S.Adamchik, Yu F.Luchko, O I Marichev The Evolution of Integrals of Hypergeometric Functions – Дубна-90, 74
- Аксельрод И Р , Белоус Л Ф [1973] Программирование на языке СИРИУС – Харьков-72, 68-120
- Акуленко Л Д , Липов Л К , Лорер М Е , Михайлов С А [1989] Ориентация схвата нагруженного электромеханического манипулятора антропоморфного типа - Изв АН РАН Техн кибернетика 1989 N 4
- Алгоритмы и программы небесной механики Всес совещ Ленинград-1990 Тезисы - Препр ин-т теор астрон АН СССР Л , 1990, 80 с
- Алексеев А С , Чубаров М А [1978] О Численно-аналитическом построении областей абсолютной устойчивости - Дифференциальные и интегральные уравнения (Горький) 1978, N 2, 101-108 РЖ Мат, 1979, 7Б274 Теж же и Макарычева Д Н Алгоритмы аналитического исследования устойчивости динамических систем на ЦВМ Теория устойчивости и ее прилож Новосиб , 1979,229-239 Теж же и Шильман С В Алгоритмы аналитического исследования устойчивости динамических систем на ЦВМ З Всес Четаевской конф по устойчивости движ.аналитик мех . упр движением Иркутск, 1977, 30-31
- Аналитические вычисления на ЭВМ и их применение в теоретической физике Материалы междунар совещ – Дубна-80, ОИЯИ, 1980, 187 с , - Дубна-83, ОИЯИ, 1983, 260 с , - Дубна-85, ОИЯИ, 1985, 420 с , - Дубна, ОИЯИ, 1990, 260 с
- Аналитические преобразования на ЭВМ в автоматизации научно-исследовательских работ Тез докл Всес конф – Вильнюс-90, 1990, 94 с
- Андиранов А Н , Ефимкин К Н , Задыхайло И Б 1990 Непроцедурный язык Норма и методы его реализации – Языки и параллельные ЭВМ Алгоритмы и алгоритмич языки - М.. Наука 1990 3-37 Андиранов А Н , Ефимкин К Н , Задыхайло И Б Непроцедурный язык для решения задач математической физики. // Программирование, 1991, №2, 80-94 Andrianov A N , Bazarov S B , Bugryua A B , Efimkin K N Solution of three-dimensional problems of gas dynamics on multiprocessor computers // Computational mathematics and modeling V 10, N 2, 1999, 140-150 Андиранов А Н , Гусеева Г Н , Задыхайло И Б Применение языка Норма для расчета дозвукового течения вязкого газа. // Математич моделирование, т 11, N 9,1999 45-53
- Анисимова В Б , Воскресенская Е В , Демура В И , Сащенко В И [1984] Применение аналитических машинных методов в теории оболочек – Горький-1984, 63-64 Анисимова В Б , Воскресенская Е А , Демура В И Расчет цилиндрических оболочных

- конструкций с использованием аналитического процессора - Киев КГУ, 1985, 4-31
 (Деп Укр НИИ НТИ 14 05 1985 N 1021 Ук-85деп)
- Анисимова В Б [1990] О возможности использования машинной аналитики в механике оболочек и пластин - Киев-88, 9-19
- Арайс Е А [1980] О решении задач численно-аналитического характера в системе АВТО-АНАЛИТИК - Дубна-80, 173-180
- Арайс Е А [1985] Система Авто-Аналитик - Программирование, 1985, N 1, 50-56 Арайс Е А, Яковлев Н Е Автоматизация аналитических вычислений в научных исследованиях - Новосибирск Наука, 1985, 222 с
- Арайс Е А., Арайс Л А , Юровецкий А М [1990] Автоматизация моделирования на основе численно-аналитических методов - Вильнюс-90 с 62
- Арайс Е А , Дмитриев В М [1982] Моделирование неоднородных цепей и систем на ЭВМ - М Радио и связь, 1982, 160 с Арайс Е А , Дмитриев В М Автоматизация моделирования многосвязных механических систем - М Машиностроение, 1987
- Арайс Е А , Сибиряков Г В [1973] Авто-Аналитик.- Новосибирск НГУ, 1973, 284 с Арайс Е А [1977] Символьный анализ радиоэлектронных цепей в системе Авто-Аналитик - Изв. вузов Радиоэлектроника, 1977, N 6, 111-113
- Арайс Е А , Шалеев В П , Яненко Н Н [1974] Реализация метода внешних форм Картана на ЭВМ - Докл АН СССР, 1974, 214, N 4, 737-738 - РЖ Мат, 1974, 6B1149 Ганжа В Г Мелешко С В , Мурзин Ф А , Шалеев В П , Яненко Н Н Реализация на ЭВМ алгоритма исследования на совместность систем уравнений в частных производных // Доклады АН СССР, 1981, 261, №5, с 1044-1046, РЖ Мат, 1982, 451206
- Бабаев И О , Брумбера В А , Васильев Н Н , Иванова Т В , Скрипниченко В И , Тарасевич С В [1980] УПП - универсальный пуссоновский процессор - Дубна-80, 80-91 - РЖ Астр, 1981 9 51 1030
- Бabenko К И , Забродин А В , Задыхайло И Б [1981] Некоторые вопросы анализа математических алгоритмов решения задач и архитектуры ЭВМ - Матер семинара «Проблемы вычислительной математики» под рук Г И Марчука АН СССР, ОВМ, ВНИТИ препринт №7, 1981 Андрианов А Н , Бабенко К И , Забродин А В , Задыхайло И Б , Котлов Е И , Мямлин А Н , Подберзовин Н.В., Поздняков Л А О структуре вычислителя для решения задач обтекания Комплексный подход к программированию - Вычислите процессы и системы Под ред Г И Марчука, вып. 2 М , Наука, 1985.
- Банщиков А В , Бурлакова Л А , Иванова Г Н , Симонов С А [1984] Пакет символьных вычислений МЕХАНИК задачи и структура - Горький-84, 68-69 РЖ Мат, 1987, 12Г403 Те же Пакет символьных вычислений МЕХАНИК задачи и структура - ППП Итоги и применение Новосиб, 1986, 96-105 Те же и Иртегов В Д О разработке и использовании пакетов программ аналитических вычислений для задач механики - Дубна-85, 65-70
- Банщиков А В , Бурлакова Л А , Иртегов В Д [1989] Методы компьютерной алгебры в классической механике Ленинград-89, 9. Те же и Иванова Г Н Использование ППП МЕХАНИК для моделирования и качественного исследования сложных систем - Ленинград-89, 7 Банщиков А В , Бурлакова Л А Об алгоритмах символьных вычислений при исследовании устойчивости // Программирование 1987 N3, 72-80
- Banshchikov A V , Burlakova L A , Ivanova G N , Integov V D , Novikov M A , Titorenko T N [1998] Experiments of Development and Usage of Packages of Symbolic Computations Intended for Investigation of Mechanical Systems // Pragua-98 IMACS-ACA'98 <http://math.unm.edu/ACA/1998/proceedings.html> A V Banshchikov, L A Burlakova Computer algebra and problems of motion stability // Там же - IMACS-ACA'98
- Бараускас Р А , Кульватис Г П , Рагульскис К М [1984] Расчет и проектирование виброродвигателей - Л Машиностроение, 1984, 101 с Бараускас Р А Применение аналитических преобразований на ЭВМ для получения матриц конечных элементов пьезокерамических тепл - Вильнюс-84, 81-83
- Ватчин А А , Торилов В Л , Shishkov D L [1990] Group classification of of Nonlinear Differential Systems using Personal Computer - Дубна-90, 77
- Бегун П И , Водень Г А , Зобнин О П [1984] Система аналитических вычислений тонко-

- стенных упругих элементов - Горький-84, 95-96
- Бежанова М М, Катков В Л, Помтосин И В [1972] Работа по аналитическим преобразованиям в ВЦ СО АН СССР - Харьков-72, 18-20 - РЖ Мат, 1973, 68646
- Бежанова М М [1980] Проектные спецификации ППП Препр ВЦ СО АН № 225 Новосибирск, 1980 46 с Так же Управл машины и системы 1981 №4,113-118
- Безденежных А.Н., Любимцев Р Г, Стронгин Р Г, Чубаров М А [1992] О преподавании компьютерной алгебры - Пакеты прикладных программ. Программное обеспечение математического моделирования. М.. Наука, 1992, 3-8
- Белоус Л Ф [1984] Связь системы АЛГЕБРА-0 с системой СИРИУС - Горький-84, 21-22
- Белоус Л Ф, Корольков Е Е [1981] Разложение в ряд Тейлора с помощью ЭВМ - В сб Вычисл мат и программирование в физ исслед Киев, 1981 3-11
- Белоусов И Р [2002] Формирование уравнений динамики роботов-манипуляторов Препринт N 45 ИПМ им М В Келдыша, 2002 Балобан И Ю, Боровин Г К, Сазонов В В Язык программирования правых частей уравнений движения сложных механических систем Препр N 62 ИПМ, 1998 Белоусов И Р Применение метода символьных преобразований для формирования алгоритмов параллельных вычислений в задачах кинематики и динамики роботов Отчет ИПМ № 5-19-93 1993 Он же Методы моделирования и дистанционного управления движением роботов - Докт дисс ИПМ, 2002
- Белявичус Р В [1984] Эффективный метод формирования матрицы жесткости гибридного изгиблного элемента - Вильнюс-84, 5-7
- Беркович Л М, Гердт В П, Костова З Т, Нечавеевский М Л [1992] Приводимые линейные дифференциальные уравнения второго порядка - ППП Программное обеспечение математич моделирования М ,1992,9-25 L M Berkovich, F.L Berkovich SOLDE A Reduce Package for solving of second order linear ordinary differential equations // Modern Group Analysis & Probl of Math Modelling, XI Russian Col., Proc , Samara 1993 21-37
- Берман В С, Климоев Д М [1987] Система тиМАТН - тиSIMP для символьных вычислений на персональном компьютере - Препр ИПробл мех АН СССР, 1987, N 298, 31 с
- Бестле Д , Шилен В , Эберхард П [1993] Оптимизация транспортного средства с активно управляемыми подвесками - Изв РАН Техн кибернетика 1993 N 1
- Бирюков С В [1996] Sergey V. Birjukov Teaching Physics with DERIVE. International DЕRIVE Journal, 1995, v 2, N2, p 51-76
- Бирюков С В [1999] Denve в курсе компьютерной физики - Минск-99, 85-86
- Благоещенский Ю В , Фишман Ю С [1970] Программа для решения уравнений нелинейной механики на ЦВМ с входным языком АНАЛИТИК - Кибернетика, 1970, N 3, 64-69 Фишман Ю С, Благоещенский Ю В, Щербов В А Программа для аналитического решения уравнений нелинейных колебаний на ЦВМ типа МИР с входным языком АНАЛИТИК - Кибернетика, 1971, N 4, 64-69. Фишман Ю С, Щербов В А, Тимошенко В И Программа решения уравнений нелинейной механики асимптотическими методами Машины для инжен расчетов Сб в 7 Киев, 1973 26-32
- Боголюбская А А Гердт В П, Тарасов О В [1988] О пакетном наполнении систем SCHOO-ONSCHIP и REDUCE - Аналитические ППП-88 83-90
- Боос Э Э , Дубинин М Н, Еднерал В Ф и др [1989] E Boos, M Dubinin, V Ednreal, V Ilyin, A Kryukov, A Pukhov, A Rodionov, V Savill, D Slavov, A Taralov ComprHEP - computer system for calculations of particle collision characteristics at High Energies Система ComprHEP - компьютеризация расчетов характеристик сечений и распадов при высоких энергиях (от Лагранжиана до графиков сечений). Репринт 89-63/140 М 1989 НИЯФ МГУ 16 р Так же E Boos, M Dubinin, V Ednreal et all. - Дубна-90, 25
- Бордюг Б А [1989] Методы компьютерной алгебры в задачах управления движением шагающих аппаратов - Ленинград-89 Бордюг Б А Компьютерное конструирование: модели динамики шагающих аппаратов - там же
- Бородавчина Т В Бороненко Т С, Быкова Л Е Черницова А М [1981] Численные и аналитические теории движения внешних спутников Юпитера Прикл неб механ и управл движ. Науч член по космонавтике М ,1980,191-197 РЖ Астр,1981,12.51 132
- Бороненко Т С [1975] Алгоритм для реализации в системе Авто-Аналитик метода усреднения уравнений возмущенного движения в кеплеровых элементах, основанного

- на преобразовании Ли Астрономия и геодезия (Томск), 1975, N 5, 27-45. Она же Применение метода преобразований Ли к решению задачи Делоне до третьего порядка - Астрономия и геодезия, 1976, N 6, 18-25 Т С Бороненко Ю Б Шмидт Реализация в системе БОРА алгоритма преобразования Ли - Алгоритмы небесной механики Тез Всес совещ Рига, 1980, 30-33 (+Горский-84, РЖ Мех, 1985, 1A18)
- Бороненко Т С [1980] Аналитическая теория движения шестого порядка внешнего спутника планеты - Астрономия и геодезия, 1980, N 8, 97-101 - РЖ Астр, 1981 9 51 77
- Т С Бороненко, Л А Московкина, В А Томаров Ю Б Шмидт Полуаналитическая методика расчета движения ИСЗ типа НАВСТАР в эйлеровых элементах - Астрономия и геодезия, 1984 N 12 66-70 - РЖ Астр, 1985, 12 51 75
- Bocharov A.V., Bronstein M.L. [1989] Implementing two methods of Geometrical Theory of Differential Equations An Experiments in Algorithm and Software Dysigh / Acta Applicadae Mathematicae 1989 V 16 143-166 Так же A V Bocharov Dubna-90 20 A V Bocharov, D L Shishkov Dubna-90, 37
- Брагин А Ф, Леонов В В, Руденко В М, Шмыглевский И П [1992] Синтез алгоритмов расчета траекторий низколетящего ИСЗ Программирование 1992 №5, 81-87
- Брумберг В А [1963] Ряды полиномов в задаче трех тел - Бюлл ИТА АН СССР 1963, т 9 № 4 (107), 234-256 Брумберг В А Представление координат планет тригонометрическими рядами - Труды ИТА АН СССР 1966, № 11 3-88
- Брумберг В А [1974] Небесно-механические методы проведения буквенных операций на ЭВМ - Томск ТГУ, 1974, 114 с Брумберг В А [1980] Аналитические алгоритмы небесной механики - М: Наука 1980, 208 с
- Brumberg V A [1995]. Analytical Techniques of Celestial Mechanics / Springer 1995
- Брумберг В А, Евдокимова Л С, Скрипиченко В И [1975] Квазипериодические промежуточные орбиты больших планет и резонансы нулевого порядка - Астрон ж, 1975, 52, N 2 420-431
- Брумберг В А, Иванова Т В [1982] Brumberg V A, Ivanova T V New approach to determining planetary perturbations in lunar theory - Celest Mech, 1982, 26, N 1, 77-81 В А Брумберг, Т В Иванова Релятивистские эффекты в динамике системы Земля-Луна - Тр ИТА АН СССР, 1984, N 19, 5-16 - РЖ Астр, 1985, 7 51 66 Так же О решении векторной системы уравнений движения Луны в тригонометрической форме - Бюлл ИТА АН СССР, 1984, 15, N 8, 3-9 - РЖ Астр, 1985, 10 51 120
- Брумберг В А, Исакович Л А [1975] Кеплеровский процессор и разложение пертурбационной функции с помощью системы АМС - Алгоритмы небесной механики (Ленинград), 1975, N 4, 28 с
- Брумберг В А, Тарасевич С В, Васильев Н Н [1989] Brumberg V A, Tarasevich S V, Vasilev N N Specialised celestial mechanics systems for symbolic manipulations - Celest Mech 1989, 45, 149-162 - РЖ Мех, 1990, 2A78 + В том же N много статей по САВ в небесной механике - РЖ Мех, 1990 2A85, 86 87, 109 и др
- Bruno A.D., Edneral V F, Stanley Steinberg [1998] Foreword // Mathematics and Computers in Simulation 1998, v 45, 409-411 Bruno A D 1998 Normal Forms // там же 413-427
- Брюно А Д, Варин В П [1995] Первая предельная задача для уравнений колебаний спутника / Препринт №124 ИПМ им Келдыша, 1995 Вторая предельная задача для уравнений колебаний спутника/ Препринт N128 ИПМ им Келдыша, 1995 Alexander D Bruno, Victor P. Varin The limit problems for equation of oscillations of a satellite // Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy, 1997, v 67, 1-40
- Бублик Б А [1978] ЭВМ МИР-2 как средство обучения курса высшей математики Препр Ин-т кибернетики АН УССР, 1978, 18 с
- Бублик Б А [1984] Аналитическое моделирование задач на графах - Вильнюс-84, 75-76
- Бублик Б А, Клименко В П, Погребинский С В, Фишман Ю С [1987] АНАЛИТИК Численно-аналитическое решение задач на малых ЭВМ Справочное пособие - Киев Наукова думка, 1987, 143 с
- Бублик Б А, Щербина В А [1984] Построение базисной системы функций трехмерной ячеекной задачи гидродинамики средствами АНАЛИТИКА-79 - Горский-84, 62-63
- Будник А П, Гай Е В Работнов Н С, Полов С В, Турчин В Ф, Щенков И Б [1970] Ма-

- шинное выполнение аналитических выкладок в математической физике с использованием языка РЕФАЛ / Тез докл Симпозиума по вопросам обработки символьной информации. ВЦ ГССР, Тбилиси, 1970 Щенков И Б Программа действий с дробно-рациональными функциями, написанная на языке РЕФАЛ / Там же Будник А П., Гад Е В., Работнов Н С., Климов Анд В., Турчин В Ф., Щенков И Б Базисные волновые функции и матрицы операторов в коллективной модели ядра // Ядерная физика, т.14, в 2, 304-314, 1971 Виноградов В Н., Гад Е В., Полюс С В., Работнов Н С., Щенков И Б Построение физических базисов групп O(5) и SU(3) с автоматическим выполнением символьных преобразований // Ядерная физика т 16, в.6, 1178-1187, 1972
- Бурлакова Л А Иртегов В Д, Почтаренко М В [1979] Применение ЭВМ для вывода и исследования дифференциальных уравнений движения механических систем в буквенно-виде - Теория устойчивости и ее прилож. Новосиб, 1979,247-255 - РЖ Мех, 1980, 4A15 Т е же Использование символьных выкладок в некоторых задачах механики Дубна-80,137-142 Т е же и Голиков В В Символьные вычисления в пакете прикладных программ по устойчивости движения механических систем Дубна-83 155-160
- Бурлакова Л А Почтаренко М В [1986] Новые возможности в пакете символьных вычислений для решения задач общей механики - ППП (Пакеты прикладных программ) Итоги и применение Новосибирск, 1986, 105-112 - РЖ мат 1986, 12Г402
- Бычков С П Хорошилов А И и др [1975] Язык СИМУЛА в мониторной системе ДУБНА для БЭСМ-6 / Препринт №118 ИПМ АН СССР, 1975 Бычков С П., Зеленецкий С Д., Фисун В А., Хорошилов А И Язык СИМУЛА в мониторной системе ДУБНА для БЭСМ-6 / Препринт №118 ИПМ АН ССР, 1976
- Бячков А Б., Иванов В Н., Суслонов В М [1990] Символьное построение уравнений динамики систем связанных твердых тел средствами языка аналитических вычислений Reduce - Вильнюс-90, 8-9. Byachkov A B Susl'nov V M, Ivalov V N Software for the Multibody Dynamics Simulations in Studying of the Theoretical Mechanics. - S-Petersburg-93 (CSAM'93), 245-246 A B Byachkov, V M Susl'nov Maggi's Equations in Terms of Quasi-Coordinates // Regular & Chaotic Dynamics 2002, v 7, 269-280
- Валиуллин А Н., Ганжа В Г., Мурзин Ф А., Шалеев В П Яненко Н Н [1981] Применение символьных преобразований на ЭВМ для построения и анализа разностных схем - Препр Ин-т теор и прикл мех СО АН СССР, 1981, N 7, 10 с Т е же и Ильин В П вместо Мурзина - ДАН, 1984, 275, N 3, 528-532 - РЖ Мат, 1984, 7Г341
- Ван Хюльзен Я А., Кальме Ж 1986 Применение компьютерной алгебры В кн Компьютерная алгебра Символьные и алгебраические вычисления М, Мир, 1986, с 308-325, РЖ Мат 1983 11B1174
- Ватульнян А О, Соловьев А Н [1997] Конечные элементы для электроупругих пластин Минск-97 80-81
- Васильев Н Н [1980] Система СТР для операций над чебышевскими полиномами - Дубна-80, 186-187
- Васильев Н Н [1985] Совместные вычисления разреженных полиномов и синтез вычисляющих программ - Дубна-85, 154-160
- Васильев Н Н, Еднерал В Ф [1994] Компьютерная алгебра в физических и математических приложениях - Программирование, 1994, N 1, 70-82
- Васильева А В [1975] Система АЛИТА проведения аналитических операций над рядами Пуассона на ЭВМ - Алгоритмы небесной механики (Ленинград), 1975, N 7, 40 с
- Вашковаяк М А [1983] О методе приближенного расчета стационарного ИСЗ // Космич исслед., 1972,10, N2,147-158 - О численно-аналитическом методе расчета 12-часовых ИСЗ по почти круговым орбитам // Космич исслед 1983, 21, N6, 819-823 Вашковаяк М А Численно-аналитический метод исследования эволюции астероидных орбит // Космич исслед 23, N 3 335-346 Лидов М Л, Вашковаяк М А О квазиспутниковых орбитах в ограниченной эллиптической задаче трех тел // Письма в Астрон журн, 1994, 20, N 10, 781-795
- Величенко В В [1984] Явные решения задач механики в системе аналитических преобразований на ЭВМ - Вильнюс-84, 12-13
- Величко Т И, Галин В Я, Макушкин Ю С, Тютарев Вл Г [1986] Аналитические вычис-

- ления на ЭВМ в молекулярной спектроскопии - Новосибирск Наука, 1986, 189 с
- Веретенников В Г, Карлов И И, Маркесе А П, Медведев С В [1990] Аналитические вычисления на ЭВМ в курсе теоретической механики - Вильнюс-90, 54 Веретенников В Г, Карлов И И, Маркесе А П, Медведев С В, Пеньков В И, Синицын В А Чеховская Т Н Теоретическая механика Вывод и анализ уравнений движения на ЭВМ Учебное пособие - М.: Высшая школа, 1990, 174 с
- Виттенбург Й [1980] Динамика систем твердых тел М.: Мир 1980, 292 с
- Видякин В В [2004] О некоторых подходах к созданию теории поступательно-вращательного движения тел Солнечной системы - Тез 5 Междунар симпоз по классич и небесн механике Великие Луки авг 2004 М ВЦ РАН 2004 62 Видякин В В Поступательно-вращательное движение многих твердых тел Архангельск 1998 200 с
- Войтенко С С, Смирнов Е Я [1983] Теория оптимальной стабилизации Учебное пособие - Л ЛГУ, 1983, 116 с Войтенко С С, Сивков А Н, Смирнов Е Я Применение средств компьютерной алгебры при решении задач предварительного определения орбит - Препр Ин-т теор астрон АН СССР 1989 28-29
- Воцховский С Ю, Теслер Г С [1991] Реализация точных вычислений в алгебрах рациональных и произвольной разрядности десятичных чисел в составе системы АНАЛИТИК-89 - Севастополь-91, 40-41
- Воробьев Е М 1999 Введение в систему "МАТ" М 264 с
- Воробьев С В, Машкова О В [1977] Расчет динамических параметров слоистой конструкции на основе численных методов механики сплошных сред Минск-97 82-83
- Ворожцов И Н, Почтаренко М В [1990] Программное обеспечение символьных вычислений в задачах динамики и управления - Вильнюс-90
- Воскресенская Е В [1990] Расчет многосвязных конструкций с произвольными граничными условиями средствами языка АНАЛИТИК - Киев-88, 122-129
- Вукобратович М, Стокич Д [1989] Программное обеспечение динамического подхода к управлению гибкими производственными модулями Изв АН СССР Техн киберн 1989 N 4 Вукобратович М, Кирчанский Н, Петрович Т Проектирование высокопроизводительных регуляторов роботов на базе процессоров конвейерного типа Там же Вычислительная математика и вычислительная техника - Харьков-72 Харьков ФТИНТ АН УССР, 1973, N 3, 5-77
- Гердт В П, Жарков А Ю [1984] Методы исследования и решения дифференциальных уравнений средствами аналитических вычислений на ЭВМ - Горький-84, 16-19
- Гердт В П, Жарков А Ю, Швачка А Б [1984] FORMINT - программа исследования интегрируемости нелинейных эволюционных уравнений - Горький-84 115-116
- Гердт В П, Тарасов О В, Ширков Д В [1980] Аналитические вычисления на ЭВМ в приложении к физике и математике - Успехи физ наук, 1980 30, N 1 113-147
- Герман В.И., Кобелев В В [1984] Автоматическое программирование вариационно-разностных схем расчета задач теории упругости и оболочек - Горький-84,
- Герценштейн С Я, Родичев Е Б, Шмидт В М [1984] О численной реализации метода Бубнова-Галеркина при исследовании двумерной и трехмерной конечноамплитудной конвективной неустойчивости - Горький-84, 64-66
- Глазунов Н Н [1985] Численно-аналитические вычисления и нестандартные арифметики Дубна-85 126-129 Глазунов Н Н Интеграция систем компьютерной алгебры и интервальные вычисления Программирование 1992 №5, 51-57
- Глазунов Н.М [1987] Численно-аналитический метод исследования на ЭВМ устойчивости линейных систем - Сложные системы управления Киев, 1987, 10-14
- Глазунов Н М [1989] О некоторых приложениях формальных групп в теории динамических систем - Кибернетика, 1989, N 4, 118-120 Глазунов Н М [1990] Гамильтоновы системы, алгебраические кривые и компьютерная алгебра - Вильнюс-90 77
- Глушков В М, Бондарчук В.Г., Гринченко Т А, Дородница А А, Клименко В П, Летищевский А А, Погребинский С Б, Стогний А А, Фишман Ю С [1971] АНАЛИТИК - алгоритмический язык для описания процессов с использованием аналитических преобразований - Кибернетика, 1971, N 3, 102-134 - РЖ Мат 1972, 1B986 Глушков В М, Гринченко Т А, Дородница А А, Драх А М, Капитонова Ю В, Клименко В П, Крес

- ЛК. Летичевский А.А., Погребинский С.Б., Царюк Н.П., Фишман Ю.С. АНАЛИТИК-74 - Кибернетика, 1978, N 5, 114-147 - РЖ Мат. 1979, 6B1017+ Препр N 12 Инст кибернетики АН УССР, АНАЛИТИК-79 - РЖ Мат. 1983, В1020
- Глушков В.М., Молчанов И.Н., Клименко В.П. Фишман Ю.С. и др [1976] Программное обеспечение ЭВМ МИР-1 и МИР-2 // Наукова думка Київ, 1976 - 223 с
- Говорун Н.Н., Федорова Р.Н., Шириков В.П. [1984] Математическое обеспечение аналитических вычислений на ЭВМ - Горький-84, 15
- Говорухин В.Н., Цибулин В.Г. [1997] Введение в MAPLE. Математический пакет для всех - М , Мир, 1997 - 208 с Говорухин В.Н., Цибулин В.Г. Компьютер в математическом исследовании Maple, MathLab, LaTex, С.-Пб 2001
- Годенко В.П. [1984] Применение УВК СМ-1410 для решения задач нестационарной дифракции плоских волн на жестких телах, расположенных вблизи границы Горький-84
- Гордеева Г.Г., Илюхин А.А. [1984] Построение решений механики гибких стержней средствами ЭВМ - Горький-84, 100-101
- Гордеева Ю.Ф. 1973. Учет влияния концентрированных масс в полуаналитическом методе расчета движения искусственного спутника Луны / Препринты N 26-27 ИПМ АН СССР. Либов М.Л., Гордеева Ю.Ф // Космич. исслед., 1974, 12, №4, 491
- Гордон В.А., Мажеру В.В., Ницци М.Е. [1984] Применение САВ в задачах на собственные значения для неоднородных стержней Горький-84
- Городецкий О.М., Климов Д.М., Корлюкова А.В. [1984] Реализация аналитических процедур теоретической механики на ЭВМ в системе MMANG - Препр ИПробл мех АН СССР, 1984, N 233, 55 с Городецкий О.М Специализированная система MMANG для проведения аналитических выкладок в механике сложных систем твердых тел - Аналитические ППП-88, 115-128 Городецкий О.М., Климов Д.М., Корлюкова А.В. Проворов Л.В. Программирование компонент систем аналитических выкладок на Рефале - Препр ИПробл механики АН, 1987, N 295, 65 с
- Горюнов В.И., Долгов Г.А., Лобашов Н.И. [1984] Использование системы аналитических преобразований АЛГЕБРА-0 для расчета эквивалентных параметров передаточной функции многомерной линейной модели - Горький-84, 69-70
- Градецкий А.В., Градецкий Н.В. [1992] Моделирование динамики механических систем символьно-численным методом на персональной ЭВМ - Изв АН РАН Техн кибернетика 1992 N 6
- Гребеников Е.А., Пал А. [1995] Grebenikov E.A., Pal A. General Formulation of Some Problems of Celestial Mechanics for Constructing Solutions Using Computers - Bucharest-95, 23 Гребеников Е.А., Масюков В.В. МБЛ - метод для точного представления решений нелинейных уравнений небесной механики - С.-Петербург-95 97-99.
- Гребеников Е.А., Козак Д., Якубяк М. [2002]. Методы компьютерной алгебры в проблеме многих тел M, 2002, 209 с. E.A.Grebennikov, E.V.Ikhsanov, N.I.Zemtsova Linear Stability of Stationary Solutions of the Ring-Shaped Newton Ten-Body Problem, TUM, Proc 6-th Intern Workshop on Comp Algebra In Scientific Comput., Passau, Germ 2003, 179-186. E.A.Grebennikov, A.N.Prokopenya Determination of the Boundaries between the Domains of Stability and Instability for the Hill's Equation, - Kiev, Nonlin Oscillat., v 6 (1), 2003, 42-51
- Григорьев Д.Ю. [1985] Эффективные алгоритмы для символьного решения систем полиномиальных уравнений и неравенств - Дубна-85, 202-207
- Гринченко Т.А., Дородница А.А., Клименко В.П. Фишман Ю.С. [1972] Система аналитических преобразований для инженерных расчетов на ЭВМ МИР-2 Харьков-72 21-25
- Грошева М.В. [1985] Обеспечение символьных преобразований в прикладных исследованиях средствами ЭВМ - Дубна-85, 7-12 Грошева М.В., Климов Д.М. Опыт использования аналитических преобразований на ЭВМ в задачах механики - Препр Ин-т пробл мех АН СССР 1987 N 296, 39 с
- Грошева М.В. [1988] Применение и эксплуатационные возможности систем аналитических вычислений - Аналитические ППП-88, 30-38 + Ленинград-88 -РЖ Мех. 1990, 4A32 Грошева М.В. О применении символьного программирования на ЭВМ для решения некоторых задач механики - Тр Ин-та мех МГУ, 1989, 102-110
- Грошева М.В., Ефимов Г.Б. [1988] О системах аналитических вычислений на ЭВМ в за-

- дачах механики - Аналитические ПП-88, 5-30 Грошева М В , Ефимов Г.Б. Вопросы развития и использования САВ на ЭВМ - Препринт № 20 ИПМ АН СССР, № 5, 1988
- Грошева М В , Ефимов Г Б , Самсонов В А [1992] Использование символьных преобразований на ЭВМ в механике / Отчет ИПМ им М В Келдыша РАН и НИИ Механики МГУ, №5-4-92, -М , 1992, 140 с + Эволюция использования компьютеризированных аналитических вычислений в задачах механики / Препр.ИМеханики МГУ, №16-95, 1995,44 с
- Grosheva M V , Efimov G B , [1993] On using symbolic manipulations in Mechanics - Kiev-93 11-14 Grosheva M.V., Efimov G.B., Samsonov V.A. On using symbolic manipulations in Mechanics - Computer Algebra Applications Intern Worshop ISSAC Gamburg, Germany, Oct 1995 Abstract S -Peterburg 1995, 11-14 Efimov G.B. Grosheva M V On Using Computer Algebra in Mechanics / Computer Algebra in Scientific Computing Intern Conference, St Petersburg, April 20-24, 1998 Extended abstracts St Petrsb 1998, 37-40
- Грошева М В , Ефимов Г Б , Самсонов В.А [1998] Символьные преобразования на ЭВМ в задачах управления Известия АН Теория и системы управления 1998, N 3, 80-91.
- Grosheva M V Efimov G B, (ed) [1998] The History of Computer Algebra Applications Prague-98 Session Theses of Report - Moscow, 1998 36 р
- Грошева М В , Ефимов Г Б , Брумбера В А и др Системы аналитических вычислений на ЭВМ Информатор-83 Информатор N 1 ИПМ АН СССР, 1983, РЖ Мат,1984, 11Г398
- Грошева М В , Привалов В А Самсонов В А [1984] Использование САВ при моделировании характеристик взаимодействия вращающегося тела с потоком Горький-84,70-71
- Грошева М В , Самсонов В А [1990] Информационный банк - символьные преобразования на ЭВМ в задачах механики - Вильнюс-90, 92
- Гульбинас А С [1982] Машинный синтез диноптимального закона движения - Механика машин (Москва), 1982, N 59, 97-101
- Гульбинас А С [1984] САВ в исследованиях инженера-механика - Горький-84, 51-52
- Гульбинас А С , Боядявиц М А [1984] Автоматизация получения матриц конечных элементов в аналитическом виде в МКЭ - Вильнюс-84, 15-17 Гульбинас А С , Кубилене М , Кульватене Р В [1983] "Машинная аналитика" для автоматизации составления программ по методу конечных элементов. - Дубна-83, 70-73
- Гурин Н И , Скоморохов А Г [1989] Аналитические вычисления в системе REDUCE Справочное пособие - Минск. Наука и техника, 1989, 119 с
- Гутник С А [1984] Анализ положений равновесия спутника с использованием системы аналитических вычислений REDUCE - Горький-84, 103 Gutnik S A Symbolic numeric investigations for stability analysis of Lagrange systems Math & Comput in Simulation, 2001, v 57, 211-215
- Девягин Е А [1999] О движении колесных роботов - Доклады науч школы-конф Мобильные роботы и мекатронные системы - М МГУ, 1999 169-200
- Дедус Ф Ф [1990] Применение аналитических преобразований при обработке результатов экспериментальных исследований на ЭВМ - Вильнюс-90, 79-80
- Демченко В И Дурновцев Б Я , Федорова Р Н [1983] Использование аналитических вычислений при построении автоматизированной обучающей системы - Дубна-83
- Демченко В И Коробейников М Ю Аналитизатор формул для автоматизированной обучающей системы - Вильнюс-90, 54-55
- Демура В И [1990] Расчет шарниро опертых цилиндрических оболочек произвольного профиля в аналитической постановке - Киев-88 130-136
- Демьянович Ю К [1981] О системе аналитических вычислений на Алголе в мониторной системе "Дубна" - Программирование, 1981, N 4, 57-67 - РЖ Мат, 1981, 12B1356
- Демьянович Ю К [1984] О новых возможностях и о применении системы аналитических вычислений на Алголе-ГДР - Горький-84, 71-73
- Демьянович Ю К [1989] Об уменьшении ошибок округления при автоматизированной генерации программ с помощью САВ - Ленинград-89, 31
- Демьянович Ю К [1990] Об использовании САВ в АОС Вычислительная математика - Вильнюс-90, 56-57
- Дмитриев М Г [1990] Применение метода штрафа для решения краевых задач на основе САВ - Информатика и системный анализ Ашхабад ФТИ АН ТССР, 1990

- Дмитриев В М., Шутенков А В [1989] Численно-аналитическое моделирование сложных механических систем - Ленинград-1989
- Дмитриев В М Шутенков А В Анализическая обработка исходных данных и численное моделирование механических систем - Вильнюс-90
- Дмитриев В М Зайченко Т Н Система автоматизированного моделирования адаптивных роботов МАРС-АР. - Севастополь-91.
- Dmitriev O N., Pogorelov D Yu [2003] Generalization of Plate Finite Elements for Absolute Nodal Coordinate Formulation / Multibody System Dynamics, v 10, 17-43, 2003
- Добринина И С Карлов И И Черноуско Ф Л [1994] Компьютерное моделирование управления движением системы связанных твердых тел - Изв АН РАН Техн кибернетика 1994 N 1, 167-180
- Довгий Б П Мольченко Л В [1984] Применение языка АНАЛИТИК для автоматизации подготовки краевых задач теории пластин и оболочек к численному решению на ЭВМ - Горький-84 104-105
- Довженко З П [1963] Получение на ЭВМ аналитического выражения общего решения системы аналитических уравнений в виде рядов / Диплом. рук. М Л Лидов МГУ.1963
- Долгов Г А , Киселева Л В Макарычева Д Н, Митина Т А Чубаров М А. [1984] Автоматизированная система для выполнения аналитических преобразований при анализе устойчивости - Горький-84, 55-56 - РЖ Мех, 1985, 1A42
- Долгов Г А , Макарычева Д Н Чубаров М А Пакет АЛГЕБРА-0 для аналитических операций над алгебраическими многочленами и полиномиальными матрицами - Оптимизация и математическое обеспечение САПР Горький, 1982, 15-30 - РЖ Мат, 1983, 7B937
- Долгов Г А Чубаров М А [1990] АНФОР - расширение фортрана для аналитических вычислений Уч пособ Н Новгород ННГУ, 1990, 72 с +Программирование,1994, N 1,16-21
- Дородницын А А [1956] Решение математических и логических задач на быстродействующих ЭВМ - Всес конф Пути развития советского математического машиностроения и приборостроения Москва, март 1956 г Пленарные доклады ВИНИТИ.М 1956
- Дроздов М Ю Маланин В В [1984] О формировании программ для исследования механических систем сложной структуры средствами САВ REDUCE-2 Горький-84,73 М Ю Дроздов О некоторых дополнениях к САВ Reduce 3.0 Справ описание Пермь 1988
- Дроздов М Ю Маланин В В Миркович В М [1990] Об опыте преподавания САВ в Пермском университете - Вильнюс-90 57
- Дьяконов В Б , Бирюков С В Derive в России // Монитор-Аспект 1995 М , № 3 56-60, Derive User Groupe Derive Newsletter International Derive Journal
- Дьяконов В Б [1996] Справочник по применению системы Derive М , Наука 1996 Он же Справочник по системе символьной математики Derive М 1998 Справочник по применению системы PC MatLAB М 1993 Математическая система Maple V М 1998
- Дьяконов В П Компьютерная математика Теория и практика М 2001, 1296 с
- Дьяконов В П [1999] Интеграция - новый этап развития систем компьютерной алгебры Минск-99, 28-29 Дьяконов В П Перова Е В, Петрова И В Возможности САВ MuPAD в начальном и высшем образовании Минск-99, 91-92
- Евдокимова Л С [1977] Система POLY проведения аналитических операций над степенными рядами на ЭВМ - Алгоритмы небесной механики (Ленинград), 1977, N 15, 40 с
- Единерал В Ф. Крюков А П Родионов А Я [1983] Язык аналитический вычислений REDUCE 4.1 - М МГУ, 1983, 84 с, Ч 2 - 1986, 86 с
- Единерал В Ф [1985] Нормализующие преобразования для нелинейных систем ОДУ - Дубна-85, 219-224 Единерал В Ф, Хрусталев О А Пакет для приведения систем ОДУ к нормальной форме - Программирование 1992 №5, 73-80
- Емельянов Н В [1979] Возмущения 3 и 4 порядков относительно скатия планеты в орбите спутника - Астрон ж , 1979, 56 N 5, 1070-1076 - РЖ Астр, 1980, 2 51 127
- Емельянов Н В, Салимов В Н [1983] Ряды для координат точек либрации в ограниченной задаче трех тел - Астрон. ж , 1983, 60, N 4 763-766
- Емельянов Н В [1980] Влияние притяжения Луны и Солнца на движение ИСЗ - Итоги науки и техн ВИНИТИ Сер Исслед космич пространства Двиг ИСЗ 1980, N 15,44-81
- Емельянов Н В [1983] Методы составления алгоритмов и программ в задачах небесной механики - М Наука, 1983, 128 с - РЖ Астр, 1983 12 51 26

- Емельянов Н В [1984] Проблемы применения аналитической теории движения ИСЗ в задачах геодинамики и геодезии - Наблюдения ИСЗ (Прага), 1984, N 23, 399-411
- Ершов А П, Шура-Бура М Р [1976] Становление программирования в СССР Ч 1 Начальное развитие. Ч 2 Переход ко второму поколению языков и машин / Препринты N 12, 13 ВЦ СО АН СССР, Новосибирск Таюже Кибернетика, 1976, №6, 141-160
- Ефимов Г Б [1970] Предельное решение в задаче об оптимальном разгоне аппарата с малой тягой в центральном поле - Космич исслед., 1970, 8, N 1, 26-45 - РЖ Мех, 1970, 7A28 Предельное решение в задаче об оптимальном разгоне аппарата с малой тягой в центральном поле / Изд. ИПМ АН СССР, -М, 1970, То же Диссертация
- Ефимов Г Б Коникова Н С [1977] Автоматические буквенные преобразования в задаче двуногой ходьбы - Тез 2 Всес конф по оптимиз в механике Казань-78, КАИ, 1977
- 18 Грошева М В Ефимов Г Б Коникова Н С, Самсонов В А Автоматический символьный вывод уравнений двуногой ходьбы - Тез Всес совещ по робототехнич системам, Владимир, 1978 - М, 1978, 196
- Ефимов Г Б [1983] Аналитические выкладки в цикле вычислительного эксперимента - Дубна-83, 58-63
- Ефимов Г Б, Грошева М В [1983] Некоторые свойства систем аналитических вычислений как пакета прикладных программ - ППП Технология разработки Новосибирск, 1984, 174-182 Ефимов Г Б Исследование программных систем аналитических вычислений на ЭВМ / Отчет №О-221-87, ИПМ им М В Келдыша, 1987, 120 с
- Ефимов Г Б, Грошева М В, Абдрахманов А Т [1984] Об использовании полиномиальной САВ в задаче оптимального управления - Горький-84, 73-74
- Ефимов Г Б [1989] Системы аналитических вычислений и их классификация - Ленинград-89, 5-6 Таюже Ефимов Г Б - Киев-88, 27-40
- Ефимов Г Б, Зуева Е Ю. [1991] Кибернетическая аналогия и аналитические преобразования - С-Петербург-91, 63-64
- Ефимов Г Б, Зуева Е Ю, Щенков И Б [2001] Компьютерная алгебра в Институте прикладной математики им М В Келдыша // Математич моделир 2001, v 13, N 6, 11-18
- Efimov G B, Zueva E Yu, Tshenkov I B Computer Algebra in Keldysh Institute of Applied Mathematics Computer Algebra and its Application to Physics Dubna-2001, 58-68
- Они же Препринт №27 ИПМ им М В Келдыша, 2003, 20 с Ефимов Г Б Из истории развития и применения Компьютерной Алгебры в Институте прикладной математики имени М В Келдыша // Математ машины и системы Киев, 2003, № 2, 96-105
- Журавлев В Ф [1983] Метод рядов Ли в проблеме разделения движений в нелинейной механике - Прикл мат и мех., 1983, 47, N 4, 559-565 Журавлев В Ф, Климов Д М Прикладные методы в теории колебаний М, Наука 1988 328 с
- Журавлев В Ф, Руденко В М [1983] К анализу силовых характеристик подвеса криогенного гирокомпаса - Изв АН СССР Мех тверд тела, 1983, N 1, 9-15
- Забродин А В [2000] Супер-ЭВМ МВС-100, МВС-1000 и опыт их использования при реализации задач механики и физики Математич моделирование. 2000, т 12, N 5, 61-66
- Фортов В Е, Савин Г И, Левин В К, Забродин А В, Шибанов А К Создание и применение системы высокопроизводительных вычислений на базе высокоскоростных сетевых технологий Информац технологии и вычислител системы. 2002, №1.
- Задыхайло И Б, Камынин С С, Любимский Э З [1971] Вопросы конструирования вычислительных машин из блоков повышенной квалификации Препринт ИПМ, 1971
- Задыхайло И Б, Мямлин А Н, Смирнов В К, Эйсмонт Л К [1974] Об эффективной аппаратной реализации языка для описания объектов на уровне понятий и символьных преобразований - Искусств интеллект Итоги и перспектив - М МДНТИ, 1974, 157-165
- Задыхайло И Б, Котов Е И, Красовский А Г, Мямлин А Н, Смирнов В К О повышении эффективности символьных преобразований - Препринт N15 ИПМ АН СССР, 1975 Тоже и Поздняков Л А вместо Красовского А Г Вычислительная система с внутренним языком повышенного уровня Препринт N41 ИПМ АН, 1975
- Закс М Б [1983] Аналитические преобразования на ЕС ЭВМ Саратов Сарат ГУ, 1983, 143 с Он же Аналитико-численные решения инженерных задач в САП ПЛ/1-ФОРМАК и РЕДЫОС-2 на ЕС ЭВМ Дубна-1983, 256-260 Закс М Б, Ермаков В М АОС для

- курса математического анализа на ЭВМ ЕС - Деловые игры и методы активного обучения Челябинск, 1982, 71-72 Тез же САП для целей обучения - Вильнюс-84, 26-27
- Заремба А Т , Звездя С В [1989] Методы компьютерного конструирования моделей механики манипуляционных работ - Ленинград-1989 Заремба А Т , Левин А Б Разработка методов компьютерного конструирования поверхностей синтеза оптимального управления многозвездных технических систем - Вильнюс-1990
- Земляков А С , Сабитов Р А , Самое Е И [1977] Машинная оптимизация механических управляемых систем - Тез докл 2 Всес конф по оптимальному управлению в мех системах, Казань, 1978 Казань, 1977, с 142 (Также - Теор устойчивости и ее приложения Новосиб.: 1972, 264-271 - РЖ Мех, 1980, 9A70)
- Зимина О В [2003] Печатные и электронные учебные издания в современном высшем образовании М МЭИ, 2003 336 с
- Золотарев В Н , Зоря А В , Славянов С Ю [1991] База знаний по специальным функциям - Компьютерные методы небесной механики С -Петербурга-91, 67
- Золото М Г , Востриков М М [1990] Аналитические вычисления в проектировании систем управления - Вильнюс-90, 65
- Зубрицкий Д А [1990] Реализация алгоритма аналитического конструирования управляемого устройства на ЭВМ - Вильнюс-90
- Иванова Н В , Макарычева Д Н , Метрикун В С , Лейсель М А , Чубаров М А [1978] Численно-аналитическая методика расчета автоколебаний типа шимми - В сб Математическое обеспечение САПР Горький, 1978, 98-110
- Иванова Т В [1979] Кеплеровский процессор и аналитический генератор функций небесной механики на основе системы УПП Алгоритмы неб механики, 1979, N 28, 48 с - РЖ Мех, 1985, 1A20 Иванова Т В Решение некоторых задач небесной механики с использованием универсального пуссоновского процессора - Горький-84, 105-106
- Иванова Т В Пуссоновский процессор PSP Препр ИТА N 64 1997 46 с Так же In Dynamics, Ephemerides and Astrometry of Solar System Kluwer 1996 283
- Иванова Т В [1997] Построение промежуточной орбиты в тригонометрической теории движения Луны с учетом планетных возмущений / Новые теоретические результаты и практические задачи небесной механики Тез докл М , ГАИШ 1997 44
- Иртегеев В Д , Новиков М А [1984] Нормализация автономных систем на ЭВМ - Вильнюс-1984 30-31
- Кабулов В К [1963] К выводу дифференциальных уравнений упругости и строительной механики на ЭВМ - Докл АН УзССР, 1963, N 9, 5-8 - РЖ Мех, 1964, 4B406 Кабулов В К Алгоритмизация в теории упругости и деформационной теории пластичности - Ташкент Фан, 1966, 394 с - РЖ Мех, 1967, 7B234 Кабулов В К , Толок В А [1971] Алгоритмическая система для решения на ЭВМ задач теории упругости и пластичности - В сб Вопросы вычисл и прикл математики Ташкент, 1971, 3-102
- Кабулов В К [1979] Алгоритмизация в механике сплошных сред Ташкент Фан, 1979,304 с
- Каждан Я М , Щенков И Б 1989 Схлопывание сферической полости в среде, совершенено прозрачной для объемного излучения // Журнал прикл мех техн физики (ПМТФ) 1989, №1 (173), Наука, Новосибирск, с 41-49
- Калинина Н А [1972] Об иерархии в системах символьных действий Харьков-72 70
- Калинина Н А , Поттосин И В [1977] Архитектура универсальных систем аналитических преобразований приспособляемость к классу задач и связь с системами программирования / Теория и практика системного программирования Новосибирск, 1977, 5-12 - РЖ Мат, 1978, 11B1214 Калинина Н А Поттосин И В Проблематика разработки систем аналитических преобразований на ЭВМ - Дубна-80, 5-15
- Калинина Н А Поттосин И В , Семенов А Л [1984] Система аналитических вычислений АУМ-ЭЛЬ для МВК ЭЛЬБРУС - Горький-84, 24-25
- Калинина Н А Семенов А Л [1984] О работах последних лет в области разработки САВ на ЭВМ - Вильнюс-84, 87-89 Калинина Н.А., Семенов А Л О работах по аналитическим вычислениям на ЭВМ - Программирование, 1988, N 5, 77-88
- Калинченко П А [1990] Библиотека быстрых преобразований многочленов на форктране - Вильнюс-90, 83

- Канторович Л В [1957] Об одной математической символике удобной при проведении вычислений на машине - Докт АН СССР, 1957, т 113, N 4, 738-739 Канторович Л В , Петрова Л Т С математической символикой, удобной при вычислениях на машинах - Тр 3 Всес матем съезда Т 2 М , 1956 с 151 - РЖ Мат, 1957, 3592
- Калитонова Ю В [1985] Об аналитических преобразованиях Состояние и проблемы - Кибернетика, 1985, N 1, 82-92 - РЖ Мат, 1985, 8Г322 Калитонова Ю В , Колядя С В Система аналитических преобразований в алгебре логики / Разработка ЭВМ нового поколения архитектура, программиру-е, интеллектуализация Новосиб, 1986, 110-117
- Калустина Т В [1999] Компьютерная система МАТЕМАТИКА 3.0 - М 1999, 240c
- Карацевский В В Филер З Е [1984] Получение на ЭВМ уравнений движения электромеханических систем с помощью формализма Лагранжа-Максвелла Горький-84,75-76
- Карнаухов М А [1991] Численно-символьный интерфейс в системе MS-DOS С-Пб-91, 87
- Карлов В Я , Калягин Д А Самарский А А [1978] Принципы разработки пакетов прикладных программ для задач математической физики - ЖВМ и МФ, 18 N 2 458-467
- Карлов И И , Климов Д М , Маркееев А П [1989] Аналитический вывод на ЭВМ уравнений движения упругого тела в гравитационном поле Препр Ипробл мех РАН №411 1989
- Карлов И И , Колбасов А В [1991] Решение инженерных задач на персональном компьютере Препр ИПрМех РАН № 492 1991 Карлов И И , Назаров Т Ю Программирование в системе MathCAD Препр ИПрМех РАН № 437 1990 Шуров А И , Карлов И И и др Основы Maple Применение в механике Препр ИПрМех РАН, 1995
- Катков В Л [1990] Аналитические выкладки при разработке программ - Вильнюс-1990 66-67 (также Препринт N 23 (333), Ин-т математики АН БССР, Минск, 1988, 8с)
- Катков В Л , Костюкова Н И [1969] Процессор КИНО - в сб Динамика сплошных сред (Новосибирск), 1969, N 1, 48-60 - РЖ Мат, 1969, 12B551
- Катков В Л , Полов М Д [1984] Система автоматизированной обработки дифференциальных уравнений - Вильнюс-84 35-36
- Капишный А А Ломонос Л Н Стоян Н Н [1990] Использование языка АНАЛИТИК при решении первой основной задачи теории упругости для гетерболоидальной трещины на границе раздела материалов - Киев-88, 97-106
- Керов Л А , Кобыльник С А , Петров В П [1984] Автоматизация аналитических выкладок в задачах функционального моделирования механических преобразователей оптических приборов - Горький-84, 77
- Кикин А Б , Педсах Э Е [1984] Система программ на языке Фортран IV для аналитических преобразований в задачах кинематики механизмов - Горький-84, 77-79
- Кирализбаева П В [1990] Реализация численно-символьного интерфейса в системе Редисе для персональных ЭВМ - Вильнюс-90, 84-85
- Кириллов А И [2000] www.academiamxxi.ru А И Кириллов О В Зимина Решебник по высшей математике Maple М 2001
- Кирсанов М Н [2002] Решебник Теоретическая механика /Под ред А И Кириллова М ФИЗМАТЛИТ, 2002
- Кистлеров В Л [1987] Принципы построения языка алгебраических вычислений FLAC - Препр Ин-т пробл упр АН СССР, 1987, 26
- Кистлеров В Л , Серебровский А П [1986] Использование языка алгебраических вычислений FLAC в диалоговых САПР систем управления - Диалог информац.-вычислите системы Иркутск, 1986, 111-113 Григорьев Ф Н , Кистлеров В Л , Кузнецова Н А Применение методов аналитических символьных вычислений на ЭВМ при автоматизации проектирования систем управления - Тез 10 Всес совещ по пробл управл Т 2 Алма-Ата, 1986, 277-278
- Клименко В П , Погребинский С Б , Фишман Ю С [1981] Особенности проблемно-ориентированных комплексов на базе СМ-1410 / АСУ Проблемно-ориентированные комплексы Киев, 1981, 26-33, также Управл системы и машины, 1982, N 5, 9-11 Клименко В П , Погребинский С В , Фишман Ю С Развитие математического обеспечения МИР для решения математических и прикладных задач аналитическими методами - Дубна-83, 132-136 Клименко В П , Погребинский С Б , Фишман Ю С Диалоговая реализация численно-аналитических методов решения научных и прикладных про-

- грамм на ЭВМ СМ-1410 - Диалог Человек-ЭВМ Серпухов, 1984, 46-52
- Клименко В П Фишман Ю С Бублик Б А, Горовой В Д, Шевченко В Я [1989] АНАЛИТИК-89 Харьков, 1989 78 с Деп ВИНИТИ 29 06 89, № 4305 -689 Бублик Б А, Фишман Ю С и др Алгоритмический язык АНАЛИТИК-89 Препр 90-1 ИКБ им В М Глушкова АН УССР Киев, 1990 43 с Морозов А А, Клименко В П, Фишман Ю С Основные свойства алгоритмического языка АНАЛИТИК-91 Кибернетика, 1993, N 3, 117-127 Клименко В П Фишман Ю С Система программирования АНАЛИТИК-91 С-Петербург-91, 56
- Клименко В П, Морозов А А, Фишман Ю С, Бублик Б А, Горовой В Д, Калина Е А [1995] АНАЛИТИК-93 // Кибернетика и сист анализ 1995, № 5 127-157 АНАЛИТИК-2000 А А Морозов, В П Клименко, Ю С Фишман А Л Ляхов, С В Кондрашов, Т Н Шавлюк // Мат машины и системы 2001 №1-2 66-99
- Клименко В П, Ляхов А Л [2003] Прикладная математическая задача как объект компьютерной алгебры / Мат машины и системы 2003, № 3-4, 103-123 В П Клименко, А Л Ляхов Ю С Фишман Основные тенденции развития языков систем компьютерной алгебры / Мат машины и системы 2002, №2 С 2
- Климов Д М [1986] Методы компьютерной алгебры в задачах механики - Аннот докл 6 Всес съезд по теор и прикл механике, Ташкент, 1986, 346-347 Климов Д М Методы компьютерной алгебры в нелинейных задачах механики - Тр Всес конф, "Нелинейные явления" Москва, 1989 - М , 1991, 67-74 - РЖ Мех 1991, 12 А 83
- Климов Д М Ефимов Г Б, Руденко В М, Самсонов В А [1985] Методы исследования сложных механических систем и вычислительная техника - Оптимизация и моделирование в САПР Горький, 1985, 3-33
- Климов Д М Руденко В М, Леонов В В [1984] Использование ЭВМ для решения асимптотическими методами некоторых задач нелинейной механики и магнитостатики - Вильнюс-84, 78-79 Климов Д М, Леонов В В, Руденко В М Методы аналитических вычислений на ЭВМ в нелинейных задачах механики - Изв. АН, МТТ, 1986, N 6, 24-29
- Климов Д М, Руденко В М [1989] Методы компьютерной алгебры в задачах механики - М Наука, 1989, 214 с - РЖ Мех, 1990, 2A22
- Клоюк А С [1988] Методические указания по применению систем аналитических вычислений для решения на ЕС ЭВМ задач по теоретической механике (каф теоретич и строительной мех Омского сельскохоз ин-та) - Омск, 1988, 31 с
- Клюев Ю И Паалов В А, Проворов Л В, Семенов В Н [1984] Исследование неустановившихся колебаний упругих конструкций на основе преобразования Лапласа с применением системы аналитических вычислений АЛЬКОР - Горький-84, 106-107
- Колгунова С В, Коноплев В А [1989] Компьютерное конструирование моделей механики шестиступенного двадцатипятизвенного испытательного стенда-тренажера - Ленинград-89 Т же Компьютерное конструирование моделей механики шестиступенного двадцатипятизвенного испытательного стенда-тренажера - Ленинград-89
- Компьютерные методы небесной механики - Тез докл Всес совещ С-Петербург, 1991 С-Петербург-91, 101 с
- Кобрин А И и др [2000] Имитационное моделирование задачи внешней баллистики тела сложной аэродинамической формы с высокими несущими свойствами Научно-методич сборн Теоретич механика М МГУ, 2000 в 23 167-192
- Кобрин А И [2005] Роль курса теоретической механики и новых образовательных технологий в подготовке специалистов в области мехатроники и робототехники Тула-2005 44-48
- Коноплев В А [1984] Исследование кинематики сложного движения тела с помощью матричных методов - Прикладная механика 1984, т 20, N 3, 130-131
- Коноплев В А [1989] Конструирование агрегативных моделей механики носителя систем твердых тел ПММ, 1989, 53, N 1,24-31 Коноплев В А Агрегативные модели механики систем твердых тел со структурой дерева Изв АН СССР МТТ 1989 N 6,46-53 Коноплев В А, Колгунова С В Зеэжда С В, Тихомолов М Е, Уличев А Г Технология символичного конструирования агрегативных моделей механики систем тел Вильнюс-90
- Коноплев В А [1992] ПП АММУСТ Основы теории механического наполнения.-ППП Программное обеспечение математ моделей М 1992,85-95 Коноплев В А Aggrega-

- tive Methods in Multibody Systems Mechanics Prepr IPME RAS (S-Pb) N 78, 1992, 49 p
- Коноплес В А Агрегативная механика систем твердых тел - СПб Наука, 1996, 166 с
- Коноплес В А , Заремба А Т , Черноных В П [1989] Агрегативные методы компьютерного конструирования моделей механики систем твердых тел - Ленинград-89, 9-11
- Коноплес В А , Колгунова С В Макаров И.А , Пилиленок А А [1989] Рекуррентная реализация агрегативного метода конструирования символьных моделей механики систем тел - Ленинград-89 Коноплес В А . Фишков А Л Агрегативные методы компьютерного конструирования моделей добывчных комплексов - Ленинград-89
- Константинов М С , Федотов Г Г [2001] Проектирование траекторий перелета к Меркурию с ЭРД VIII Всеросс съезд по теоретич и прикл мех Тез Екатеринбург, 2001, 351 Konstantinov M S , Petukhov V G Orbital evolution of solar sail in problems of geo-senlnc trajectories and lunar missions – Paper IAF 01 A6-07 Toulouse, France 2001
- Корняк В В , Федорова Р Н [1985] Применение систем аналитических вычислений для определения симметрий Ли и Ли-Беклунда дифференциальных уравнений - Дубна-85, 248-261 – РЖ Мат, 1986, 11B1102 Корняк В В , Фущич В И Вычисление на ЭВМ неподобных симметрий систем линейных уравнений математической физики Дубна-85, 345-350. РЖ Мат 1986 11A336 W/Fushchich, V V Komyak Computer Algebra application for determining Lie & Lie-Backlund symmetries of differential equations J Symbolic Computation 1989 7, 611-619 V V Komyak Extraction of "Minimal" cochain subcomplexes for computing cohomologies of Lie Algebras and Superalgebras / Dubna-2001
- Корлюков А В [1985] Арифметика произвольной точности с учетом ошибки округления в системе АВ Программирование, 1985, №5, 32-37 Так же - ППП Опыт использования М , Наука 1989 127-128
- Котта Ю [1986] Kotta U Inversion of discrete-time linear-analytic systems - Proc Acad Sci ESSR Phys Math , 1986, 36, N 4, 425-431 Котта Ю , Роомельди Р Использование системы Редью при линеаризации и расщеплении дискретных нелинейных систем - Динамика нелин.проц. управления М ИПУ, 1987, 62 с Котта Ю Р Роомельди Р Применение системы Reduce для решения обратных задач механики: Вильнюс-90
- Котта Ю Р [1992] Синтез нелинейных систем с заданными вход-выходными отображениями Эффекты дискретизации - Изв РАН Техн кибернетика 1992 N 3
- Крейцер Г П , Березовская Ф С [1975] Сложные особые точки системы двух дифференциальных уравнений - Избранные алгоритмы и программы для ЭВМ МИР-2. (Материалы математич обеспечению ЭВМ) АН СССР, НИВЦ Пущино, 1975 Крейцер Г П Простые особые точки системы двух дифференциальных уравнений Там же, 1976
- Крюков А П , Родионов А Я . [1984] Система динамической отладки для программ на языке REDUCE - Горький-84, 25-27
- Крюков А П , Родионов А Я . [1984] Проблемы контроля и модификации базы знаний системы аналитических вычислений REDUCE - Вильнюс-84, 79-81
- Крюченко В Е [1984] Аналитические преобразования в задаче о нестационарных колебаниях неоднородных взякоупругих систем Грыж-84
- Кузьмин А В [1980] LRFOR - система операций над целыми и рациональными числами произвольной точности - Алгоритмы небесной механики (Ленинград), 1980, N 33, 32 с Кузьмин А В Операции с полиномами и рациональными функциями в системе SASM - Алгоритмы небесной механики, 1981, N 34, 40 с Кузьмин А В О возможностях использования системы SASM в механике - Горький-84, 35-37
- Кулаев А Л , Лейсель М А [1984] О выборе параметров устойчивой против шимми опоры с помощью системы АЛГЕБРА-0 - Горький-84, 79-80 - РЖ Мех, 1985, 1B250
- Кулешов А С [2002] О первых интегралах уравнений движения твердого тела вращения на абсолютно шероховатой поверхности Препринт ИПМ им М В Келдыша N 68, 2002 О первых интегралах уравнений движения симметричного гиростата на абсолютно шероховатой плоскости Препринт ИПМ им М В Келдыша N 47, 2003
- Кульватене Р В [1982] Исследование динамики и оптимизации двухступенчатых держателей магнитных головок с аэродинамической смазкой - Деп Лит НИИ НТИ, N 925-82 Вильнюс, 1982 Кульватене Р В Аналитическое исследование нелинейных колебательных механических систем на ЭВМ - Вильнюс-84, 43-45 Кульватене Р В ,

- Кульвецис ГП Программа получения уравнений в вариациях нелинейных колебательных систем в аналитическом виде - Вильнюс-84, 46-47
- Кульвецис ГП [1983] ВИБРАН аналитические преобразования для проведения научно-технических расчетов на ЭВМ Дубна-83, 52-57 Кульвецис РВ Кульвецис ГП Аналитические вычисления на мини-ЭВМ Учебное пособие - Вильнюс 1989, 84 с Также - Диалоговое обеспечение языка ВИБРАН - РЖ Мат, 1983, 12B1027
- Кульвецис АП , Кульвецис ГП [1979] Получение матрицы жесткости конечного элемента в форме сектора в аналитическом виде на ЭВМ - Деп в ЛитНИИТИ, N 507-80 1979 Кульвецис ГП Действия с разреженными матрицами при аналитических расчетах Вильнюс-84, 47-50
- Кульвецис ГП 1989 Алгоритмы динамики манипуляторов и их компьютерная реализация - Ленинград-89, 12
- Курманбаев Б Имамов Т Т [1984] Система ПЛ-ОСИАЛ для выполнения аналитических преобразований в задачах механики деформируемого твердого тела Горький-84, 40
- Кутуков АЛ [1977] Аналитические решения главной задачи теории движения ИСЗ на ЭВМ - Астрономия и геодезия (Томск), 1977, N 6, 26-31
- Латышев В Н , Михалев А В , Панкратьев Е В [1984] Компьютерная алгебра - Горький-84 121-123
- Лацис А.О [2003] Как построить и использовать суперкомпьютер М.,Бесселер 2003 Суперкомпьютер Руководство пользователя <http://www.jsc.ru/informat/1000MuserGuide.zip>; Руководство программиста <http://www.jsc.ru/informat/1000 MPfGGuide.zip>
- Леонов В В [1984] Использование системы аналитического программирования Reduce-2 для решения нелинейных уравнений методом разложения по малому параметру - Горький-84, 80-81 Леонов В В Синтез алгоритмов вычисления параметров ориентации при помощи символьных выкладок на ЭВМ Аналитические ПП/П-1988,151-154
- Леора С Н , Назаров С А , Прокура А В [1984] Реализация на ЭВМ алгоритма построения уравнений теории тонких пластин - Горький-84 119
- Лидов МЛ [1978] Полуаналитические методы расчета движения спутников / Труды ИТА АН СССР, - Л , 1978, № 17, 54-61 Лидов МЛ Ляхова В А , Соловьева А А Полуаналитический метод расчета движения искусственного спутника Луны / Препринты № 69-70 ИПМ АН СССР, 1974 Также // Космич исслед , 1975, 13, № 3, 303
- Летучевский А А [1995] О распараллеливании алгоритма Бухбергера - Кибернетика и системный анализ 1995 N 2, 52-62 – Также Кибернетика за 1971-1994 гг
- Лобанова О В [1999] Практикум по решению задач в математической системе Derive М , Финансы и статистика 540 с
- Лумпое В И , Маланин В В [1982] Реализация итерационного метода решения ФПК-уравнений в системе аналитических вычислений Редьюс-2 Динамика управляем динам систем Иркутск, 1982,158-163 Они же и Полосков И Е Применение САВ при исследовании стохастических механических систем - Горький-84, 81-82
- Любимцев Я К , Метрикин В С [1984] Исследование устойчивости движения тележек с выполнением аналитических преобразований на ЦВМ - Горький-84, 82-83 - РЖ Мех, 1985, 1A54
- Ляхов А Л [1998] Исследование методом граничных элементов напряженно-деформированного состояния прямоугольной плиты полностью погруженной в упругое основание Пробл машиностр-1998 -T 1 № 3-4 89-96 А ЛЛяхов Е А Калина, Л Б Дануда Применение системы компьютерной алгебры АНАЛИТИК-93 для решения пространственных задач теории упругости Мат машины и системы 1997 №1 37-44
- Ляхов А Л [1999] Вычисление методами компьютерной алгебры интегралов по плоской области с кусочно-гладкой границей Мат машины и системы 1999 №1 53-61 А В Горик, А ЛЛяхов Решение задач изгиба композитных брусьев кусочно-однородной структуры Проблемы оптим проектирования сооружений Сб докладов III-го Всероссийского семинара - Новосибирск НГАСУ, 2000 Т 1 59-69 Ю В Рождественский А ЛЛяхов Аналитическое описание пинии профиля калибров Изв вузов Черная металлургия 1997 № 1 42-44 Там же 1998 № 7 40-43
- Макаров И А , Черновых В П Пантелей Е В [1989] Компьютерное конструирование

- уравнений движения шагающих аппаратов на базе агрегативных моделей механики систем тел - Ленинград-89
- Маланин В.В. (*Malanin V.V.*) [1995] Опыт использования систем аналитических вычислений для решения задач механики в Пермском университете - Применение ЭВМ для решения задач механики Киев, 1995, 1 (также *S-Petersburg-93* (CSAM'93), 257)
- Malanin V.V., Mikryukov V.M., Poloskov I.E.* [1993] // Prototype of the Expert System on Stochastic Dynamics - *S-Petersburg-93* (CSAM'93), 207-208 (также Переславль-95, 41-42).
- Маланин В.В., Полосков И.Е. [1993] // *Malanin V.V., Poloskov I.E. On Some Computer Algebra Applications to Random Systems Analysis* - Киев-93 (ISSAC'93), 30-31
- Маланин В.В., Полосков И.Е. [2001] Случайные процессы в нелинейных динамических системах. Аналитические и численные методы исследования. Ижевск НИЦ "Регулярная и хаотическая динамика", 2001, 160 с
- Маркееев А.П. [1970] Исследование устойчивости движения в некоторых задачах механики - Препр ИПМ АН СССР, 1970, 163 с Тоже Точки либрации в небесной механике и космодинамике М. Наука 1978 480 с
- Маркееев А.П., Медеев С.В., Сокольский А.Г. [1985] Методы и алгоритмы нормализации дифференциальных уравнений Учебное пособие - М. МАИ, 1985, 74 с
- Маркееев А.П., Сокольский А.Г. [1975] Исследование периодических движений, близких Лагранжевым решениям ограниченной задачи трёх тел / Препринт № 10 ИПМ АН СССР Они же Некоторые вычислительные алгоритмы нормализации гамильтоновых систем - Препр N 31 ИПМ АН, 1976 61 с - РЖ Мат, 1976, 861097 Они же Метод исследования периодических движений Ляпунова в гамильтоновых системах и его реализация на ЭВМ - Тр.ИТА АН 1978, N 17 62-68 Они же Буквенные выкладки на ЭВМ в задачах устойчивости механических систем - Горький-84 58 - РЖ Мех, 1985, 1A43
- Мартыненко В.П., Мартыненко М.А. [1984, 1990] Реализация систем аналитических преобразований в смешанных задачах теории упругости на языке АНАЛИТИК Киев-88, 117-121 Тоже Горький-84
- Мартыненко Ю.Г. [2000] Матричная форма уравнений неголономной механики - Сб научн.-методич.статей Теорет.механика М МГУ, 2000 в 23 9-21 Он же и М.Ф. Зацепин Применение матричных методов для составления уравнений Маджи и Эйлера-Лагранжа неголономных систем - Там же. 2004 в.25 86-101 Мартыненко Ю.Г Построение теоретико-механических моделей колесных роботов - Тула-2005, 91-99
- Матвеев А.П. [1987] Построение математических описаний функционирования электротепломеханических систем на основе метода цепей - В сб.: Моделирование и оптимизация систем автомат упр и их элементов Тула, 1987, 46-53
- Матросов В.М., Васильев С.Н., Каратуев В.Г., Суменков Е.А. [1984] Вектор-функции Ляпунова и символьное программирование - Горький-84, 13-14 Матросов В.М., Васильев С.Н. Каратуев В.Г. Суменков Е.А. Ябыкин С.А. Пакет прикладных программ вывода теорем метода векторных функций Ляпунова - ППП Методы и разработки Новосибирск, 1981, 119-131 - РЖ Мат, 1982 251290
- Матросов В.М. Опарин Г.А. Почтаренко М.В. [1984] Пакет прикладных программ по динамическому анализу нелинейных и управляемых систем - Алгоритмы и программы. Информ бюлл (Москва. ВНИИЦ), 1984, N 1(58), 72-73
- Matrosov V.M., Rayevsky V.A., Reshetnev M.F., Sotov Ye.I.* [1994] Dynamics of Fail-safe gyromoment attitude control systems of communication, navigation and land-survey satellites - In Internat Aerospace Congr August 15-19, 1994 Abstracts Moscow, Russia Anshakov G.P., Antonov Yu.G. Butynn S.A., Makarov V.P., Matrosov V.M., Sotov Ye.I. Gyromoment attitude control systems dynamics of rapid manoeuvring remote sensing spacecraf - Ibid
- Матросова Г.А. [1990] Использование аналитических преобразований в лабораторных работах по курсу "Математическое моделирование в САПР" - Вильнюс-90, 58-59
- Медеев С.В. [1984] Алгоритм нормализации негамильтоновых систем с помощью преобразований Ли - Горький-84, 120
- Методы компьютерного конструирования моделей механики систем твердых тел. Материалы Всес. рабочего совещания, Ленинград, 1988 Ленинград-88, - Препр Ленинград фил. Ин-та машиновед. АН СССР, 1989, N 16 32 с

- Методы компьютерного конструирования моделей классической и небесной механики-89 Секция I Небесная механика Тез докл Всес совещания, Ленинград, 1989 Ленинград-89 I. - Препр Ин-т теор астрономии АН СССР (Ленинград), 1989, 67 с
- Методы компьютерного конструирования моделей классической и небесной механики-89 Секция II Теория и практика компьютерного конструирования моделей механики многозвездных технических систем Материалы Всес совещания, Ленинград, 1989, Ленинград-89 II. - Препр Ленингр фил ин-та машиновед АН СССР, 1989, N 32, 83 с
- Миронов С В , Дехтяренко В М [1984] Возможности системы Reduce-2 в теории построения периодических решений обыкновенных дифференциальных уравнений - Горький-84, 83-84
- Митин В Н , Штейнеольф Л И [1984] Аналитическое исследование кинематики и динамики механизмов на ЭВМ - Горький-84, 84-85 Андреев Ю М , Митин В Н , Штейнеольф Л И Система аналитических вычислений в САПР машиностроительных конструкций - ППП Программное обеспечение математ. моделирования, М , 1992, 71-77
- Митропольский Ю А , Молчанов А А [1981] Машичный анализ нелинейных резонансных цепей - Киев Наук думка, 1981, 238 с
- Моечан А Б [1990] К построению матриц упругой поляризации плоских областей - Киев-88, 88-97
- Молчанов А А , Зинченко И Ф [1984] Декомпозиция систем нелинейных дифференциальных уравнений с применением аналитических преобразований на ЭВМ - Горький-84, 58-59
- Молчанов А А , Зинченко И Ф [1986] Система автоматизированного проектирования устройств радиоэлектронного профиля - Изв вузов Радиоэлектроника, 1986, N 1, 60-64 Они же Системы аналитических преобразований в САПР на базе мини- и микро-ЭВМ / Аналитические пакеты-88 74-82 Они же и Н В Беркаль, С Л Моседчук Применение аналитических преобразований в САПР изделий электронной техники - Киев-88, 160-168 Они же и Олефир А С Система ЭЛАН - повышение интеллектуального уровня САПР на основе аналитических вычислений. Вильнюс-90,70-71
- Московкина Л А [1975] Алгоритм решения в системе Авто-Аналитик ограниченной задачи трех тел методом Хилла-Брауна - Астрономия и геодезия (Томск), 1975, N 5, 46-52
- Мямлин А Н , Задыхайло И Б. , Смирнов В К [1980] Процессор для обработки текстовой информации Всесоюзн конфер Паралл программир и высокопроизводит системы Часть 1 Новосиб ВЦ СО АН СССР, 1980, с 54-63 Задыхайло И.Б., Эйсманн Л.К Об алгоритмах и программных средствах реализации САВ - Горький-84, 23-24
- Муатин А.Н., Ститров В К , Головков С Л [1980] A Specialized Symbol Processor - Fifth Generation Architecture Ed by J V Woods New-Holland 1980 Мямлин А Н , Смирнов В К , Головков С Л Специализированный процессор ЕС-2702 / В сб Разработка ЭВМ нового поколения Новосибирск, ВЦ СО АН СССР, 1986, 39-47
- Намиш Ю Н , Алексеева И В [1990] Об использовании языка АНАЛИТИК и метода возмущения форм границы в краевых задачах для тел вращения. - Киев-88, 20-26
- Никуланен А В Shchenkov / В [2003] Operator factorization technique of formula derivation in the theory of simple and multiple hypergeometric functions of one and several variables Препр ИПМ им М.В.Келдыша N 81, 2003 А project of a globally universal interactive program of formula derivation based on operator factorization method Прегрнт N 82, 2003
- Новиков М А [1984] Нормализация автономных систем обыкновенных дифференциальных уравнений на ЭВМ - ППП Технология разработки Новосиб, 1984, 147-155 - РЖ Мат, 1984, 12Г489
- Новоселова А Н [1990] Интеллектуализация программ спецпрактикумов на ЭВМ Вильнюс-90, 59-60
- Охощинский Д Е [1964] Исследование движения в центральном поле сил под действием постоянного касательного ускорения - Космич исслед 1964, 2, N 6, 817-842 - РЖ Mex, 1965, 11A29
- Павловский М А , Моросин О П , Свистунов С Я [1983] Методика автоматизированного составления дифференциальных уравнений движения системы твердых тел с упругими связями - В сб Механика пироколических систем (Киев), 1983, N 2, 77-80

- Палааичюс РЛ, Рагульскис КМ [1980] Построение периодических решений квазилинейных дифференциальных уравнений с помощью ЭВМ - Деп. ЛитНИИТИ, № 664-80 Каунас, 1980, 15 с
- Лейсах Э.Е., Кикин А.Б. [1987] Решение задач теоретической механики на ЭВМ. Кинематика плоского движения твердого тела - Методические указания. Ин-т текст и легкой промышл. Л. 1987, 32 с
- Лендохова Н.В., Соболеев В.А. [1990] Комплекс программ SLOWMAN для анализа разнотемповых систем - Вильнюс-90, 29-30
- Петухов В.Г. [2004] Оптимизация многовитковых перелетов между некомпланарными эллиптическими орбитами. Космич. исслед. 2004, 42 №3, 260-279 V.Petukhov, M.Konstantinov Spacecraft Insertion into High working orbits using Light-Class Launcher and Electric Propulsion Proceedings of ISSFD-XVII, v. 2, 314-327 Moscow 2003 Т.М.Елеев, M.S.Konstantinov, V.G.Petukhov et al/ Methodical Problems of Low-Thrust Trajectory Optimization Preprint of KIAM (ИПМ) N 110, Moscow 1996
- Платонова Л.Н., Шашков М.Ю. [1983] Применение системы REDUCE для построения аналитических решений уравнений "мелкой воды" - Препр. ИПМ М В Келдыша АН СССР, 1983, N 134, 31 с РЖ Мат 1984 95884
- Погорелов Д.Ю. [1991] Численные методы моделирования динамики систем твердых тел, содержащих замкнутые кинематические цепи - Севастополь-91, 49-50 Pogorelov D.Yu On Numerical Methods of Modeling Large Multibody Systems Mech and Mash Theory 1999 v 34 791-800 Также Переславль-95, 57 Также Тез. 5 Межд. симпоз. по классик и небесн. механике Великие Луки, авг 2004 М ВЦ РАН 2004 161-163
- Погорелов Д.Ю. [1993] О кодировании символьных выражений при синтезе уравнений движения систем твердых тел // Изв. РАН Технич. кибернет. 1993 209-213 Также Abstracts of EUROMECH 343, Gamburg, 1995, 21 Погорелов Д.Ю., Ефимов Г.Б. Решение некоторых модельных задач механики с использованием программного комплекса "Универсальный механизм" / Препринт №72 ИПМ им М.В. Келдыша, 1993, 24 с
- Pogorelov D.Yu [1997] Some developments in computational techniques in modeling advanced mechanical systems / Sympo on Interaction betw Dyn & Control in Adv. Mechan. Systems Klugier Acad. Publ. Dordrecht, 1997, 313-320 D.Yu Pogorelov Differential-algebraic equations in multibody system modeling. Numerical Algorithms. V 19, 1998 183-194
- Подчуфаров Ю.Б., Матвеев А.П. [1984] Система автоматизированного построения и аналитических преобразований математических описаний гидро-, тепло-, электромеханических систем - Горький-84, 110-111 Подчуфаров Ю.Б., Матвеев А.П. АЛМАК - система автоматизированного построения и преобразования математических описаний автоматических комплексов - В сб. Моделирование и оптимизация систем автомат. упр. и их элементов Тула 1987 147-154
- Подчуфаров Ю.Б., Матвеев А.П. [1987] Математические модели систем автоматического управления. Автоматизация построения математических описаний систем автоматического управления Учебное пособие - Тула Тульск политехн ин-т, 1987, 80 с
- Подчуфаров Ю.Б., Матвеев А.П. [1987] Математическое моделирование САУ Автоматизация построения математических описаний САУ Учебное пособие Тула Тул-ПИ, 1987 Подчуфаров Ю.Б. Автоматизированные технологии проектирования управляемых систем и комплексов. Учебное пособие - Тула Тульский ГТУ, 1995, 124 с
- Позняк Ю.В. [1995] Аналитические преобразования на ЭВМ в математике и механике Учебн. пособие по курсам Выч. машины и программирование, САВ и их использование при решении научно-технических задач, Основы вычисл. эксперимента Беларусс. Гос. ун-т Минск 1995 90 с
- Позняк Ю.В., Чигарев А.В. [1997] Автоматизация аналитических преобразований в механике деформируемого тела Минск-97 97-99 Ю.В.Позняк Методы компьютерной алгебры в трехмерной теории устойчивости прямоугольных пластин - Весці Акадэміі науак Беларусі Сер. фіз.-техн. науак. Мінск 1996, № 3, 104-106
- Полозова Н.Г., Шор В.А. [1963] Применение ЭВМ к построению аналитических теорий движения планет и спутников - Проблемы движения искусственных спутников небесных тел М., 1963, 186

- Полосков И Е [1985] Применение САВ ФОРМАК для вероятностного исследования нелинейных механических систем Дубна-85 289-294
- Полосков И Е [1999] Использование компьютерной алгебры для реализации алгоритмов оптимального управления // Пробл мех и управл Нелин дин.системы Перм ГУ. Пермь, 1999. 146-158 Poloskov I E Compound program packages in random science training and technical modelling - III Intern Math.Symp (IMS-99) The Mathematica J 2001 V 8 N 2 Полосков И Е О колебаниях упругой колонны под действием случайной нагрузки // Пробл мех и управл.. Нелин динамич.системы Перм.ГУ Пермь, 2003 107-116
- Полосков И Е [2004] Теория и численно-аналитические алгоритмы моделирования случайных режимов динамических систем Докт диссертация Пермский ГУ Пермь 2004 О вращении твердого тела под действием диссипативного и случайных моментов // Изв РАН Механика твердого тела 2004 в 2 24-27
- Полов Б А, Ольир Н В, Антонюк Я П [1984] Результаты машинно-аналитического решения некоторых дифференциальных уравнений - Горький-84, 87-88
- Почтаренко М В [1978] Построение первых интегралов в буквенном виде на ЭВМ - Методы оптимизации в энергетике Иркутск, 1978, 118-125 Он же Комплекс программ по анализу стационарных движений консервативных механических систем - ППП Методы и разработки Новосиб.,1981,82-92 - РЖ Мат,1982, 261288 Почтаренко М В Организация вычислений в ППП по анализу стационарных движений механических систем - ППП Технология и разработка Новосиб.,1982,75-84 - РЖ Мат, 1982, 9B917
- Почтаренко М В [1985] Применение систем аналитических вычислений в задачах механики ППП Функциональное наполнение Новосиб.,1985,3-11 - РЖ Мат,1985, 8Г310
- Применение ЭВМ для решения задач механики - Тез докл научн - техн конф Севастополь, 1991 Севастополь-91 Киев, Знание 1991, 55 с
- Притоманов С А [1992] Применение систем аналитических вычислений в общей теории относительности и гравитации - ППП Программное обеспечение математического моделирования М , 1992, 56-62
- Проvorov Л В, Семенов В Н, Шаловалов Л А [1984] Решение нелинейных задач механики тонкостенных упругих конструкций при сложных видах нагружения с помощью системы аналитических вычислений АЛЬКОР - Горький-84, 94-95
- Проvorov Л В, Штаркман Вс.С [1982] АЛЬКОР система аналитических вычислений Ч 1 Описание входного языка, Ч 2 Работа со стековыми рядами Новые возможности системы - Препр ИПМ АН СССР, 1982, N 61, 34 с, N 166, 24 с РЖ Мат, 1982, 12 B1089 РЖ Мат, 1983 5B989 Проvorov Л В, Медвецев В А, Семенов В Н Входной язык и возможности САВ АЛЬКОР / Методич указания, М МВТУ им Баумана, 1985
- Прохоров Г В, Колбеков В В, Желнов К И, Леденев М А [1998] Математический пакет MAPLE v Release 4 Руководство пользователя - Калуга, 1998 200c
- Руденко В М [1987] Символьные вычисления на языке REDUCE для задач механики - Препр Ин-т пробл мех АН СССР, 1987 N 297, 25 с + (Руденко В М Reduce в задаче Горький-84 - РЖ Мех, 1985,1A36)
- Рыжиков Ю И [2000] Решение научно-технических задач на персональном компьютере СПб Корона Принт, 2000, 272с
- Сабитов Р А [1977] Автоматизация построения произвольной вектор-функции системы, управляющей программным движением объекта - Тез докл 2 Всес конф по оптимальному управлению в механических системах, Казань-1978 Казань, 1977, 32 Фатхуллин Э Ф , Сабитов Р А Автоматизация построения управления программным движением одного класса механических систем - Исследование операций и аналитическое проектирование в технике. Казань, 1979, 38-41
- Савченко В И [1985] Комплекс программ для решения задач механики деформируемого твердого тела численно-аналитическими методами на ЭВМ СМ-1410 - Программное обеспечение и применение малых ЭВМ Киев, 1985 40-44
- Савченко В П [1990] Об использовании САВ в механике твердого деформируемого тела - Киев-88, 1-8 В И Савченко, В Б Анисимова, Е В Воскресенская, В И Демура Использование машинных аналитических преобразований в механике оболочек - Аналитические пакеты-88 63-73

- Сваченко В И , Шваченко В Я [1990] Возможность интенсификации обучения с помощью специального математического обеспечения - Вильнюс-1990, 60-61
- Садов С Ю [1998] Плотное размещение квазиоднородных многочленов и векторные разбиения / Препринт №37 ИПМ им Келдыша, 1998
- Самарский А А , Шашков М Ю [1984] Перспективы использования символьных преобразований в вычислительной математике - Горький-84, 3-8, также - Оптимизация и моделирование в САПР Горький, 1985, 33-41
- Сарычев В А Гутник С А [1984] К вопросу о положениях равновесия спутника-гиростата // Космич исслед , 1984,22, N 3 323-326 Они же Исследование положения равновесия спутника-гиростата - Препр ИПМ АН СССР, 1990, N 84, 31 с Они же О равновесии спутника под влиянием гравитационных и статических воздействий // Космич исслед 1995, 32, N4-5 386-391
- Свешников А Г., Эльтаев В А [1985] Обучение символьным преобразованиям на основе системы ПЛЕНЭР-АНАЛИТИК - Дубна-85, 416-420
- Свищунов С Я , Губарь И В , Коебаско О Н [1984] Пакет прикладных программ для автоматизированного составления и исследования дифференциальных уравнений системы твёрдых тел с упругими связями - Горький-84, 89-90
- Сергеевский А В , Чубаров М А [1984] Опыт эксплуатации системы для аналитических преобразований - Горький-84, 8-12
- Семенов А Л [1980] Алгоритмы нахождения НОД полиномов реализация и анализ Дубна-80 104-115 Семенов А Л Полиномиальная система аналитических преобразований АРАП ППП Опыт использования - М 1989 107-114
- Сильвестров Д С [1988] Программное обеспечение прикладной статистики Обзор состояния, тенденции развития - М Финансы и статистика 1988 240 с.
- Системы аналитических вычислений (методы компьютерной алгебры) в механике деформируемого твердого тела, Киев, 1988, Киев-88,- Деп УкрНИИ НТИ, 1990
- Системы для аналитических преобразований в механике Тез докл Всес совещ , Горький, 1984 - Горький-84 Горький ГГУ, 1984, 147 с
- Скляренко (Зуева) Е Ю [1972] Система символьных вычислений для задач механики / Диплом, рук Садов Ю А Моск физико-технический ин-т - М 1972
- Скрипниченко В И [1975] Операции с буквенными разложениями на ЭВМ - Итоги науки и техн ВИНИТИ Сер Астрономия, 1975, N 11, 131 с
- Смирнов В К [2003]. Аппаратная реализация Рефала в Институте прикладной математики им М В Келдыша / Препринт № 99 ИПМ им М В Келдыша, 2003
- Смирнов В К , Толунов В Л , Шишков Д Л [1991] Аналитические вычисления на процессоре ЕС-2702 / Препринт №62 ИПМ им М В Келдыша, 1991
- Смирнова Т Н [1962] Полиномиальный прорыв и проведение аналитических выкладок на ЭВМ Труды МИАН им В А Стеклова Работы по автоматич программир, числ методам и функцион анализу Изд АН СССР М -Л 1962 Переозванская Т Н Проведение аналитических выкладок на ЭВМ при решении некоторых типов дифференциальных уравнений Там же Смирнова Т Н Проведение на ЭВМ типа М-20 полиномиальные выкладки с помощью ПРОРАБА Наука Л , 1967 РЖ Мат, 1967 9B409, также в кн. Михлин С Г Численная реализация вариационных методов - Л 1967, 379-428
- Соболев В А [1987] Интегральные многообразия, сингулярные возмущения и оптимальное управление - Укр мат ж 1987, 39, N 1, 111-116
- Соловьев А А [1974] Полуаналитический метод расчета движения искусственных спутников с большим эксцентриситетом / Препринты № 86-87 ИПМ АН СССР Лидов М Л , Соловьев А А // Космич исслед., 1978, 16, № 6 806
- Сокольский А Г [1991] Современные проблемы компьютерной небесной механики - 7-й Всес съезд по теор и прикладн механике, Москва-1991 Аннот докл М , 1991, 323 - РЖ Мех, 1991, 12A125 Sokolsky A G On the Problems of Computenzation of Celestial Mechanics - Киев-93 (ISSAC'93), 41-45
- Сокольский А Г , Вахидов А А , Васильев Н Н [1995] // Sokolsky A G , Vakhidov A.A., Vasilev N N Development of a Motion Theory for Satellites with Large Eccentricities by Means of Computer Algebra - Bucharest-95, 39 (также С -Петербург-95, 65-67, 67-70)

- Сокольский А Г, Хованский С А [1981] Программы нормализации гамильтоновых систем с тремя степенями свободы - МАИ Деп ВИНИТИ 4 ОВ.1981 N 3882-81 40 с Сокольский А Г, Шевченко И И Нелинейная нормализация автономных гамильтоновых систем на ЭВМ в аналитическом виде - Препр ИТА АН СССР 1990, N 8, 50 с
- Солеев А, Арансон А Б [1994] Вычисление многогранника и нормальных конусов его граней / Препр №36 ИПМ им Калдыша РАН, 1994 Арансон А Б Вычисление многогранника Ньютона / Мат междунар конф и Чебышевских чтений, 1996 МГУ, т 1, 32-34
- Сольницев Р И [1985] Основы автоматизации проектирования гирокосмических систем - М Высшая школа, 1985, 240 с
- Сольницев Р И, Коатун И В, Пресняк А С [1981] Вывод уравнений движения сложных электромеханических систем в аналитическом виде на ЦВМ Изв Ленинград электротех инст 1981, N 287,24-29 Р И Сольницев, И В Коатун Построение на ЦВМ в аналитическом виде математических моделей устройств систем управления Метод указания Л.ЛЭТИ,1983. Р И Сольницев, И В Коатун Построение уравнений движения гирокосмических устройств с помощью ПОЯ ПИОН-2.Горький-84 61-62 РЖ Мех,1985, 1A35
- Сорокин А Н, Черненко О С [1997] Метод возмущений в решении одной задачи геомеханики Минск-97 99-100
- Столяров А А [1962] Решение на ЦВМ одной задачи, связанной с дифференцированием функций - В сб. Проблемы кибернетики 1962 Наука №7, 189-200
- Тарасевич С В [1979] УПП - универсальный пуассоновский процессор - Алгоритмы небесной механики (Ленинград), 1979, N 27, 29 с
- Тарасевич С В [1980] Система аналитических операций для решения задач общей теории относительности GRATOS - Дубна-80, 116-121 Брумберг В А, Тарасевич С В Применение системы GRATOS для определения возмущений сферически симметричной метрики - Дубна-83 149-154
- Теория и практика автоматизированных систем аналитических преобразований Тез реп совещ, Вильнюс, 1984 - Вильнюс ИПК СНХ Лит ССР, 1984, 93 с
- Титоренко Т Н [2002] Комплекс программ для качественного исследования механических систем и электрических цепей. Автореф дисс к тн . Иркутск 2002 VD Integov, T.N. Titorenko, Using the "Mathematica" in problems of mechanics // Mathem and Computings in Simulat 2001, v 57 227-237 Иртегов ВД Титоренко Т Н О моделировании и исследовании некоторых задач с помощью компьютерной алгебры // Программирование 1997 N 1, 68-74
- Толок В А [1964] К выводу дифференциальных уравнений колебаний цилиндрических оболочек на ЭВМ - Докт АН УзССР, 1964 N 8, 9-10 - РЖ Мех, 1965 7B127 Толок В А Алгоритмизация расчета цилиндрических оболочек - Ташкент Фан 1969 121 с - РЖ Мех 1970, 5B141
- Тоом А И, Долматов В В [1984] Исследование удовлетворенности пользователей системой аналитических вычислений REDUCE - Горький-84, 49-51
- Толунов В Л [1975] Установление полной интегрируемости систем внешних дифференциальных уравнений с помощью ЭВМ Вычисл мат и мат.физика (ВМиМФ), 1975, N 2, 149-157 Толунов В Л Определение совместности и вычисление производла решения систем дифференциальных уравнений с помощью ЭВМ Там же, 1975, N 9, 158-172
- Толунов В Л [1983] Применение ЭВМ к исследованию Пфаффовых систем Численные методы механики сплошной среды Т 14 (Новосибирск), 1983, N 3, 150-158 Резников И.Г. Толунов В Л, Шеакка А Б Машинное исследование дифференциальных уравнений методом внешних форм - Горький-84, 88-89 V L Torillov Reducing systems of linear-differential equations to a passive form Acta Applic Mathmat 16 191-206 1989
- Тумасонис В В [1971] Система эквивалентных преобразований выражений - Ж вычисл мат и мат физ (ЖВМ и МФ), 1971, N 5, 1272-1281 - РЖ Мат, 1972, 1B1101 Также ЖВМ и МФ, 1972, N 2, 552-556 - РЖ Мат, 1972 7B597) Тумасонис В В Машинная алгебра и вопросы ее реализации - Вильнюс-84, 60-63
- Турчин В Ф [1968] Метаалгоритмический язык // Кибернетика, 4, с 45-54, РЖ Мат, 1971, 2B86 Алгоритмический язык рекурсивных функций (Рефал) - М., Изд-е ИПМ АН СССР Турчин В Ф Сердобольский В И Язык Рефал и его использование для преоб

- разования алгебраических выражений // Кибернетика, 1969, №3, 58-62
- Турчин В Ф [1971] Программирование на языке Рефал / Препринты ИПМ АН СССР № 41, 1971, №43, 1971, №44, 1971, №48, 1971; №49, 1971, РЖ Мат, 1972, 1B993-996
- Турчин В Ф [1972] Описание аналитических преобразований с помощью рекуррентных соотношений в рамках языка Рефал // Харьков-72 28
- Уличев А Г, Шишлов А В [1989] Агрегативная модель динамики колёсного транспортного робота - Ленинград-89
- Уральская В С, Журавлев С Г [1980] Движение ИСЗ в гравитационном поле Земли Итоги науки и техн ВИНИТИ Сер Исследование космического пространства Движение ИСЗ 1980, N 15, 5-43
- Фадеев Ю А [1982] Программа построения методов Рунге-Кутта высоких порядков - Астрономия и геодезия (Томск), 1982, N 10
- Филаретов В Ф, Корзун Ф И, Мимоход П И [1990] Использование аналитической компоненты в гибридной экспертной системе при проектировании и исследовании систем управления приводами манипуляционных механизмов - Вильнюс-90
- Фирсанов М Н [2001] Решебник по теоретической механике Решения в системе Maple V M , 2001
- Фишман Ю С [1973] Программа интегрирования на ЭВМ МИР-2 Кибернетика 1973 № 3 40-46 Щербое В А, Фишман Ю С Система интегрирования на ЭВМ МИР-3 Тез 6-й Всесоюзн Школы-семинара Владивосток 1977 19-20 + Республ ФАП Киев 1980
- Фишман Ю С [1974] Символьное интегрирование Энциклопедия кибернетики Т 1 Киев 1974 383-384 Гринченко Т А Аналитик Там же, 115-116 В.П Клименко, Ю С Фишман Аналитические преобразования на вычислительных машинах Там же, 116-117
- Хлебников В А [1976] Гравитационное поле квазистационарных сосредоточенных систем с вращением в формализме Ньютона-Генроуза // Изв вузов СССР Физика №3 113-117, 118-123 Он же и А Э Шелкоценко О точных решениях уравнений Эйнштейна-Максвелла в формализме Ньютона-Генроуза // Там же №7, 1976 140-142 148-150
- Человеский А М [1984] Совместное использование аналитических и численных методов в задаче расчета колебаний упругих систем с сосредоточенными нелинейными элементами - Горький-84, 112
- Черенных В П [1989] Использование систем САФРА и САВАГ для обменов символьными данными и для конструирования самомодифицирующихся программ. - ППП Опыт использования М 1989, 115-123 Черенных В П, Коноплев В А Применение системы САВАГ и пакета АЛГСАФ для конструирования моделей механики технических систем матричным методом - Ленинград-89
- Чубаров М А [1974] Проблема Раусса-Гурвица и последовательности полиномиальных остатков - Динамика систем (Москва) 1974, N 2, 135-163 Чубаров М А О критериях нестабильности полиномов и определении областей абсолютной устойчивости - Дифференц и интегральные уравнения Горький 1979, 149-157 Чубаров М А Алгоритмы аналитического решения задач линейной алгебры - Горький-84, 124-127
- Чубаров М А, Долгое Г А, Киселева Л В, Макарычева Д Н, Митина Т А [1988] Структура автоматизированной системы для исследования устойчивости линеаризованных моделей - Аналитические ППП-88 38-63
- Чубаров М А, Долгое Г А, Макарычева Д Н [1988] Решение систем линейных алгебраических уравнений в символьном виде - Методич указания Горький ГТУ, 1988 19 с Чубаров М А, Киселева Л В Проведение матричных алгебраических преобразований на ЭВМ - Методич указания Горький ГТУ 1988, 21 с Чубаров М А, Марков А А Вычисление символьных детерминантов - Методич указания Там же 1988 21 с
- Шашков М Ю, Щенков И Б [1983] Использование символьных преобразований для построения разностных операторов Препр N 48, ИПМ АН СССР, 1983 23 с РЖ Мат 1983, 10Б1106 Система DISLAN для построения разностных операторов Препр № 23 ИПМ, 1985 РЖ Мат 1985 9Г910 Ефимов Г Б, Тишкун В Ф, Шашков М Ю, Щенков И Б Автоматизация программирования операторных разностных схем Препринт № 20 ИПМ 1982 Также - Дубна-83 74-84
- Шишков Д Л [1984] Применение методов аналитического программирования к задачам

- нелинейных автоколебаний - Горький-1984, 113-114 Шишков Д Л Изучение разрывных решений в гидродинамике при наличии электромагнитных полей методами компьютерной алгебры - ППП Математическое моделирование М 1989 84-89
- Шурыгин В А , Яненко Н Н [1961] О реализации на ЭВМ алгебраических дифференциальных алгоритмов - Проблемы кибернетики (Москва), 1961, N 6, 33-43 - РЖ Мат, 1962, 7B332
- Щенков И Б [1984] Система аналитических преобразований SANTRA-BASIC Горький-84 47-49 И Б Щенков Система SANTRA Дубна-85 39-44
- Щенков И Б [1989] Система символьно-аналитических преобразований SANTRA-2 Описание формальной части входного языка Препр №1 ИПМ им М В Келдыша 1989
- Описание динамических функций Препр №2 ИПМ 1989 Описание функций обеспечивающих неалгебраические операции Препр №21 ИПМ,1989 Операции над выражениями основных классов Препр №14 ИПМ, 1991 Операции над матрицами Препр №15 ИПМ,1991 Оформление программ и средства отладки Препр №1 ИПМ,1993
- Шуко С Д [1984] Аналитические преобразования на Фортране в применении к некоторым задачам качественной теории дифференциальных уравнений Горький-84, 93-94
- Эйсманнит Л К [1977] О возможности параллельных схем реализации одного языка для описания задач переработки текстовой информации УС и М 1977, №2,56-64 Эйсманнит Л К, Платонова Л Н Выбор и оценка базового языка символьного процессора - Дубна-83,19-33
- Эльтеков В А [1988] Пакет программ Планер-Аналитик Аналитические ПЛП-88 147-151 Эльтеков В.А. О логико-символьном интерфейсе - Вильнюс-90, 91
- Юрконис Э П , Каюолелис А -Л К. [1984] Автоматизация аналитических преобразований при определении радиальной жесткости упруго-центрбежной муфты - Вильнюс-84, 71-73
- Яненко Н Н , Ганжа В Г , Мазурук С И , Шалеев В П [1985] Применение символьных преобразований на ЭВМ для построения и анализа разностных схем - Оптимизация и моделирование в САРП Горький 1985, 41-57 Мазурук С И , Шалеев В П Применение символьных преобразований на ЭВМ для исследования аппроксимации и устойчивости разностных схем - ЖВМ и МФ 1986, т 24, N 4 586-600
- Akitas A G [1989] Elements of computer algebra with applications - New York Wiley-Intersc. Publ., 1989, 425 p
- Barton D [1966] Lunar disturbing function. - Astron J , 1966, 71, 438
- Barton D [1967] A scheme for manipulative algebra on a computer / Comput. J. 1967, 9, 340
- Barton D , Fitch J P [1972] A review of algebraic manipulative programs and their application Comput. J 1972, 15, N 4, 362-381
- Bers A , Kulp J L , Karney C F.F. [1976] Symbolic computation of nonlinear wave interactions on MACSYMA -Comput. Phys Commun., 1976, 12, 81-98
- Bordoni L , Colagrossi A [1981] An application of REDUCE to industrial mechanics - SIGSAM Bull., 1981, 15, N 2 8-12
- Broucke R A [1980] A Fortran system for manipulation of symbolic Poisson series with applications to celestial mechanics Techn Rept. Univ Texas, ISOM, 1980, TR-80-1, 150 p
- Broucke R A Fortran-Based Poisson Series Processor and its Applications in Celestial Mechanics // Celest. Mech, 1989, v. 45, 255
- Brown W S , Hearn A C [1979] Application of symbolic algebraic computation - Comput Phys Communs, 1979 17, N 1, 207-215.
- Buchberger B [1984] CAMP a teaching project in symbolic computation at University of Linz - SIGSAM Bull., 1984, 18, N 4, 8-9
- Calmet J , van Hulzen J A [1983] Computer algebra applications In Computer Algebra Symbolic and Algebraic Computation Wien, New York Springer-Verlag, 1983, 245-258 Перевод Ван Хульзен Я А , Калмет Ж Применения компьютерной алгебры - В сб Компьютерная алгебра Символьные и алгебраические вычисления М Мир, 1986, 308-325 - РЖ Мат, 1983,11B1174
- Calmet J , Tjandra I A [1990] On the design of an artificial intelligence environment for Computer algebra systems -In: Computer Algebra Phys Res, Dubna, 1990, 17-18

- Cauchy B F [1986] Computer algebra past and future - Lect Notes Comput Sci EVROCAL'85 1986, N 203, 1-18
- Chapront J Mangeney-Gheryzman L [1968] Applications of literal series to the main problem of the lunar theory - Astron J , 1968, 73, N 3, 214-216
- Cohen J. [1976] Symbolic and numerical computer analysis of the combined local and overall buckling of rectangular thin-walled columns - Comput Methods Appl Mech and Eng , 1976, 7, 17-38
- Cohen H I, Lennge O, Sunblad Y [1976] The use of algebraic computing in general relativity - Gen Rel Grav , 1976, 7, N 3, 269-286
- Computer Algebra in Physical Research Int Conf Computer Algebra Phys Res . Dubna, USSR (1990). Memorial Volume for N N Govorun - Singapore, New Jersey, London, Hong Kong World Scd 1991 453 p Сб аннотаций Дубна, ОИЯИ, 1990 96 с
- Davis M S [1968] Programming systems for analytical developments on computers - Astron J., 1968, 73, N 3, 195-202
- Deprit A, Henrard J, Rom A R M [1967] Trojan orbits II Birkhoff's normalization - Icarus, 1967, 6, 381-406
- Deprit A, Poplarchek W, Deprit-Bartolome A [1976] Compression of ephemerides - Celest Mech 1976, 11, N 1, 53-58.
- Deprit A, Rom A [1968] Lindstedt's series on a computer./ Astron J , 1968, 73, N 3, 210-213
- D'Inverno R A [1975] Algebraic computing in general relativity - Gen Rel Grav , 1975, 6 N 6, 567-593
- Engeler E, Mader R. [1986] Scientific computation The integration of symbolic, numeric and grafic computations - Lect Notes Comput. Sci. EVROCAL'85. 1986, N 203, 185-201.
- EUROMECH 343, Computer Symbolic Manipulation in Mechanics International Colloquium Technical University Hamburg-Harburg, Hamburg, Okt 9-13, 1995 Abstracts, 70 p
- Fateman R [1984] My view of future of symbolic and algebraic computations - SIGSAM Bull , 1984, 18, N 2, 18-19
- Jefferys W H [1971] Automated algebraic manipulations in celestial mechanics - Commun ACM, 1971, 14, N 8, 538-541 - РЖ Mex, 1972, 9A68
- Hendel K [1989] Anwendungsinformation zum Programmsystem DMKS- -86 - Rep Inst. Mech Acad Wissenschaft DDR Karl-Marx-Stadt, 1989, N 20, 104 p
- Herget P , Musen P [1959] The calculation of literal expansions - Astron J , 1959, 64, 11
- Hou G., Kozai Y [1975] Analytical theories of the motion artificial satellite - In Satellite Dyn Berlin 1975, 1-15
- Howard J C [1979] MACSYMA as an aid to simulation modelling./ MACSYMA 1979, 483-521
- Howard J.C [1980] Practical applications of symbolic computation - Guilford, Surrey England LPC Sci and Techn Press 1980
- Hulzen J A van [1985] Program generation aspects of the symbolic -numeric interface - Дубна-85 104-113
- Hulzen J.A van, Calmet J [1983] Computer algebra system. - In Computer Algebra Symbolic and Algebraic Computation - Wien, N-Y Springer-Verlag, 1983, 221-243 Ван Хульзен Я А, Калмет Ж Системы компьютерной алгебры - В сб Компьютерная алгебра Символьные и алгебраические вычисления М , 1986, 277-307. - РЖ Mat, 1983, 4B1173
- Kane T R, Levinson D A [1985] Dynamics theory and applications - New York McGraw-Hill Book Company, 1985.
- Kircanski M , Vukobratovic M, Kircanski N., Temcenko A [1988] A new program package for the generation of efficient manipulator kinematic and dynamic equations in symbolic form - Robotica 1988, 6, 311-318
- Kovalevsky J [1968] Review of some methods of programming of literal developments in celestial mechanics - Astron J , 1968, 73, N 3, 203-229 Kovalevsky J [1973] Revue general des methodes automatiques de calcul de theones analytiques de satellites artificiels - Astronaut Res., Dordrecht-Boston 1973, 12-25
- Kreuzer E, Schiehlen W [1990] NEWEUL- software for the generation of symbolical equations of motion - In: Multibody systems handbook Berlin Springer, 181-202 Kreuzer E., Leister G Programmsystem NEWEUL'90 User's Guide AN-24 Stuttgart University, Institute B of

- Mechanics, 1991
- Lesser M [1995] The Analysis of Complex Nonlinear Mechanical Systems A Computer Algebra Assisted Approach - World Scientific, Nonlinear Science, series A, Vol 17, 340 pp
- LeSchack A.R , Scorizo P [1968] FORMAC language and its application to celestial mechanics - Astron J , 1968, 73, N 3, 217-220
- Levinson D A , Kane T R [1990] AUTOLEV - a new approach to multibody dynamics - In Multibody systems handbook Berlin:Springer, 1990, (Schiehlen W-1990), 81-102
- Lilov L , Bekjarov B [1983] Accuracy of multibody systems with tree-like structure and arbitrary joints - Theor and Appl Mech 1983 14, N 1
- Lilov L , Bekjarov B [1989] Accuracy of multibody systems - Mech struct and mach 1989, 17 N 2
- Lilov L , B Bekjarov B , Lorier M [1990] CAMS - a graphical interactive system for computer simulation and design of multibody systems - In Multibody systems handbook - Berlin Springer (Schiehlen W -1990), 61-80.
- Miola A M , Potofsin I V [1981] A bibliography of soviet works in algebraic manipulations - SIGSAM Bull , 1981, 15, N 1, 5-7
- Moses J [1971] Symbolic integration. the stormy decade/ Commun ACM,1971 14,n 8,548-560
- Moses J [1971] Algebraic simplification a guide for the perplexed./ Там же, 1971, 527-537
- Moses J [1974] MACSYMA - The Fifth Year - SIGSAM Bull , 1974, 8, N 3, 105-110
- Pavelle R [1986] MACSYMA Capabilities and applications to problems in engeneering and sciens - Lect Notes Comput Sci EVROCAL'85 1986, N 203, 19-32
- Paul B [1975] Analytical dynamics of mechanisms - a computer-oriented overview. - Mechanisms and Machine Theory 1975, 10, 481-507 Paul B Kinematics and dynamics of planar machinery - Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1979
- Rom A [1970] Mechanized algebraic operations (MAO) / Celest. Mech ,1970 1,N 3/4,301-319
- Schiehlen W (ed) [1990] Multibody systems handbook - Berlin Springer, 432
- Schaechter D B , Levinson D A [1988] Interactive computerized symbolic dynamics for the dynamicist - J Astron Sci . 1988, 36, N 4, 365-388
- Schwarz F [1982] A REDUCE package for determining Lie symmetries of ordinary and partial differential equations - Comput Phys Commun , 1982, 27, N 5, 179-186
- Stoutemyer D R [1986] A preview of the next IBM-PC version of mu MATH - Lect Notes Comput Sci EVROCAL'85, 1986, N 203, 33-44
- Vukobratovic M , Kircanski N [1984] Real-time dynamics of manipulation robots Ser Scientific Fundamentals of Robotics, Tol 4 Monograph B Berlin Springer-Verlag, 1984
- Vukobratovic M , Kircanski N [1984] Computer assisted Generation of robot dynamic models in analitical form - Acta appl math . Int J Appl Math and Math Appl , 1984, 2, N 2
- Vukobratovic M , Kircanski N , Timcenko A , Kircanski M [1990] SYM - program package for computer-aided generation of optimal symbolic models of robot manipulators - In Multibody systems handbook Berlin: Springer, 1990, (Schiehlen W-1990), 37-57
- Vukobratovic M , Potkonjak V [1979] Contribution to computer construction of active chain models via Lagrangian form - Trans. ASME J. Appl Mech., 1979, 46, N 1
- Wang P S [1990] Advances in integrating symbolic, numeric and grafics computing Dubna-90, 9
- Wang P , Rothschild L [1973] Factoring multivariate polynomials over the Integers - SIGSAM Bull , 1973, 20, 21-29
- Wittenburg J , Wolz U , Schmidt A [1990] MESA VERDE - a general-purpose program package for symbolical dynamics simulations of multibody systems In Multibody systems handbook - Berlin Springer (Schiehlen W-1990) 341-360
- Yun D Y Y [1973] An algorithm for solving systems of polynomial equations - SIGSAM Bull , 1973, 27, 19-25

055(02)2

Подписано в листъ 14.06.2005г. Заказ №71.
Формат бумаги 60Х90 1/16. Тираж 100 экз.



Отпечатано в Институте прикладной математики РАН
Москва, Миусская пл. 4